

约束多目标优化问题的一类内-外混合罚函数方法

施 思, 徐阳栋*, 孙月明

(重庆邮电大学 理学院, 重庆 400065)

摘 要: 该文提出一种内-外混合罚函数方法求解具有等式和不等式约束的多目标优化问题. 其中罚函数由目标函数, 内点罚函数和可行集外点罚函数构成. 在适当的条件下, 借助具有单调性的辅助函数, 证明了算法所生成的迭代序列收敛于问题的Pareto最优解或弱Pareto最优解. 同时给出了三个数值实验来验证算法的可行性. 最后将算法应用于解决多指标交通网络最小费用流问题, 并与线性加权法进行比较, 结果表明该算法在时间成本上具有明显的优势.

关键词: 多目标优化; 混合罚函数方法; Pareto最优解; 多指标交通网络均衡问题

中图分类号: O221.6

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2024)02-0199-12

§1 引 言

许多实际问题, 例如环境分析^[1], 统计学^[2], 管理科学^[3], 空间探索^[4]等, 可以被表述为多目标优化问题. 由于多目标优化的广泛应用, 多目标优化算法的发展备受关注. 其中标量化方法^[5-6]将多目标优化问题转化为单目标优化问题进行求解, 但该方法依赖先验信息. 为了克服这一缺陷, 近年来, 已有研究工作将经典的单目标优化方法扩展至多目标优化领域, 例如最速下降方法^[7-9], 牛顿法^[10-12], 邻近点法^[13-14], 邻近梯度法^[15-17], 投影梯度方法^[18-19], 共轭梯度法^[20], 信赖域方法^[21-22]和序列二次规划方法^[23].

然而以上讨论的方法主要适用于无约束或简单约束的多目标优化问题. 针对带复杂约束的多目标优化问题, Fukuda等人^[24]在2016年提出了一种外点罚函数方法(MEPM), 用于求解具有等式和不等式约束的多目标优化问题. 随后Fukuda等人^[25]又提出了一种障碍型方法(MBM)来处理带有不等式约束的多目标优化问题. 值得注意的是, MEPM中的外点罚函数可能是不可微的, 并且MEPM得到的近似解既不满足等式约束, 也不满足不等式约束; 而MBM仅适用于含有不等式约束的优化问题. 鉴于文献^[26]中的内-外混合罚函数方法是解决具有等式和不等式约束

收稿日期: 2022-08-02 修回日期: 2023-06-15

*通讯作者, E-mail: xyd04010241@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(11801051); 重庆市自然科学基金(cstc2019jcyj-msxmX0075)

的非线性优化问题的经典方法, 本文提出了经典内-外混合罚函数方法的多目标版本. 该方法的每次迭代通过求解一个无约束的实值优化子问题, 并利用单目标优化问题的方法进行求解. 受到文献[24-26]的启发, 本文借助单调的实值辅助函数证明了当非递增的参数序列收敛到零时, 序列的聚点即为Pareto或弱Pareto最优解.

本文的结构安排如下. §2回顾多目标优化和罚函数的基本概念. §3提出多目标内-外混合罚函数方法, 并建立算法的收敛性分析. §4给出三个数值实验以验证算法的可行性. §5将算法应用于求解一个多指标交通网络最小费用流问题. §6总结全文并指出后续可能的研究内容.

§2 预备知识

本节首先给出符号说明, 再回顾多目标优化和辅助函数的基本概念.

设 $\mathbf{R}^m$ 表示 m -维的欧几里得空间. 令 $\mathbf{R}_+^m := \{x \in \mathbf{R}^m : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$, $\mathbf{R}_{++}^m := \{x \in \mathbf{R}^m : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, m\}$. 上标 $\top$ 表示转置. 在 $\mathbf{R}^m$ 上, 由 $\mathbf{R}_+^m$ 诱导的偏序表示为

$$x \preceq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

更强的序关系表示为

$$x \prec y \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

本文研究具有如下形式的约束多目标优化问题

$$(\text{MOP}) \quad \min f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in D,$$

其中 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q$, $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^r$ 都是连续函数, 并且

$$D := \{x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) \preceq 0, h(x) = 0\}.$$

为方便后续讨论, 定义

$$D_1 := \{x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) \preceq 0\}, \quad D_2 := \{x \in \mathbf{R}^n \mid h(x) = 0\}.$$

同时假设 D_1 存在一个Slater点, 则有

$$D_1' := \{x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) \prec 0\} \neq \emptyset.$$

定义2.1^[27] 设 $x^* \in D$. 若不存在 $x \in D$ 使得 $f(x) \preceq f(x^*)$, 且不存在至少对于一个 $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$, 满足 $f_{i_0}(x) < f_{i_0}(x^*)$, 则称 x^* 为(MOP)的Pareto最优解.

定义2.2^[27] 设 $x^* \in D$. 若不存在 $x \in D$ 使得 $f(x) \prec f(x^*)$, 则称 x^* 为(MOP)的弱Pareto最优解.

易知Pareto最优解是弱Pareto最优解, 反之则不成立.

定义2.3^[25] 设 $B: D_1' \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ 是 D_1 上的连续函数. 若对于任意满足 $g_j(z^k) \rightarrow 0$ ($j \in \{1, 2, \dots, q\}$)的序列 $\{z^k\} \in D_1'$, 至少存在 $i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} B_{i_j}(z^k) = +\infty$, 则称 $B(x)$ 为 D_1 上的向量值障碍函数.

定义2.4^[24] 设 $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ 是 D_2 上的连续函数. 若有 $p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in D_2$, 则称 $p(x)$ 是 D_2 上的向量值外点罚函数.

定义如下所示的向量值混合罚函数 $P: D_1' \rightarrow \mathbf{R}_+^m$:

$$P(x) = f(x) + \tau B(x) + \frac{1}{\tau} p(x),$$

其中 $\tau > 0$ 为惩罚因子, $B(x)$ 和 $p(x)$ 分别是向量值障碍函数和向量值外点罚函数. 例如 $B(x) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{-g_i(x)}\right)e$, $p(x) = \left(\sum_{i=1}^m h_i^2(x)\right)e$, 其中 $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbf{R}^m$. $B(x)$ 和 $p(x)$ 的其他实例类型可见文献[24-25].

定义2.5^[28] 设 $C \subseteq \mathbf{R}^m$. 给定函数 $\Phi: C \rightarrow \mathbf{R}$,

- (i) 若对于任意的 $x, y \in C$, 有 $x \prec y \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(y)$, 则称 $\Phi(x)$ 在 C 上是弱递增的;
- (ii) 若对于任意的 $x, y \in C$, 有 $x \preceq y$, 且存在 i_0 , 使得 $x_{i_0} < y_{i_0} \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(y)$, 则称 $\Phi(x)$ 在 C 上是强递增的.

当 $m = 1$ 时, 显然弱递增函数和强递增函数都是递增函数. 根据定义, 强递增函数也同时属于弱递增函数. 有关弱递增函数和强递增函数的其他示例可见文献[27].

若 Φ 在 C 上连续且弱递增, 则对于任意的 $x, y \in C$ 有

$$x \preceq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y).$$

定义2.6^[24] 给定 $\Phi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续且次可加的 ($\Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^m$).

- (i) 若 Φ 是弱递增的, 且对于给定的序列 $\{x^k\} \subset \mathbf{R}_+^m$ 和 $M > 0$, 存在 $T > 0$ 使得

$$\Phi(x^k) \leq M \Rightarrow \|x^k\| \leq T, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

则称 Φ 是弱次可加的;

- (ii) 若 Φ 是强递增的, 且满足(1)式, 则称 Φ 是强次可加的.

引理2.1^[24] (i) 若 Φ 在 $f(D)$ 上是弱递增函数, 并且满足 $x^* \in \arg \min_{x \in D} \Phi(f(x))$, 则 x^* 是 (MOP) 的弱Pareto最优解; (ii) 若 Φ 在 $f(D)$ 上是强递增函数, 且满足 $x^* \in \arg \min_{x \in D} \Phi(f(x))$, 则 x^* 是 (MOP) 的Pareto最优解.

§3 多目标优化问题的内-外混合罚函数方法

本节给出(MOP)的内-外混合罚函数方法(MMIEPM), 并在适当条件下构建该算法的收敛性分析.

MMIEPM的框架如下所示.

算法:MMIEPM

步骤1 给定初始罚因子 $\tau_1 > 0$, 允许误差 $\varepsilon > 0$, 初始点 $x^0 \in D'_1$, 罚因子的改变系数 $\gamma \geq 1$, 令 $k = 1$.

步骤2 计算 $x^k \in \arg \min_{x \in D'_1} \Phi(f(x) + \tau_k B(x) + \frac{1}{\tau_k} p(x))$.

步骤3 若 $\|\tau_k B(x^k)\| \leq \varepsilon$ 和 $\|\frac{1}{\tau_k} p(x^k)\| \leq \varepsilon$, 则算法终止, 且 x^k 是 (MOP) 的近似解; 否则, 进入步骤4.

步骤4 计算 τ_{k+1} , 且需满足 $s \leq \tau_{k+1} < \tau_k$ ($s = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\frac{p_i(x^k)}{B_i(x^k)}}$), $k := k + 1$. 返回步骤2.

MMIEPM中, $\{\tau_k\}$ 是收敛到零的正实数的非递增序列, 且初始点 x^0 满足不等式约束. 步骤2涉及解决一个实值优化问题, 该问题可以通过运用一些经典的非线性优化方法来求解. 值得注意的是, 步骤4中, 条件 $s \leq \tau_{k+1} < \tau_k$ 是充分条件而非必要条件.

MMIEPM存在两种版本: Φ 是弱次可加时的弱版本和 Φ 是强次可加时的强版本. 为了满足标量情况下所需的经典条件, 假设

$$\inf_{x \in D_1} \Phi(f(x)) = \inf_{x \in D'_1} \Phi(f(x)). \quad (1)$$

注3.1 当 $p(x) = 0$ 时, 向量值混合罚函数 $P(x)$ 与MBM中的罚函数相同, 即MMIEPM可以退化为MBM. 并且由于 $P(x)$ 中的 $B(x)$ 与MEPM中的定义不同, 因此在处理不等式约束优化问题时, MMIEPM和MEPM也存在差异. 另外与MEPM方法相比, MMIEPM得到的近似解满足不等式约束.

引理3.1 设 $\{x^k\} \subset \mathbf{R}^n$ 是算法MMIEPM生成的迭代序列. 该算法的实现需要弱递增函数 $\Phi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, 向量值障碍函数 $B: D'_1 \rightarrow \mathbf{R}_+^m$, 向量值外点罚函数 $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ 和一系列满足 $\tau_k > \tau_{k+1} \geq s$ 的参数序列 $\{\tau_k\} \subset \mathbf{R}_{++}$, 其中 $s = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\frac{p_i(x^k)}{B_i(x^k)}}$. 令 $\Phi^* := \inf_{x \in D_1} \Phi(f(x))$ 和 $\Phi_k := \Phi\left(f(x^k) + \tau_k B(x^k) + \frac{1}{\tau_k} p(x^k)\right) = \inf_{x \in D'_1} \Phi\left(f(x) + \tau_k B(x) + \frac{1}{\tau_k} p(x)\right)$. 对于任意的 $k = \{1, 2, \dots\}$, 下述结论成立.

(i) $\Phi^* \leq \Phi_{k+1} \leq \Phi_k$.

(ii) 存在 $\eta \in \mathbf{R}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k = \eta$; 特别地, $\Phi^* \leq \eta$.

证 (i) 首先证明向量值函数 $\varphi: \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}_{++}^m$ 的表达形式

$$\varphi(\tau) = a\tau + \frac{b}{\tau} \quad (a, b \in \mathbf{R}_{++}^m, \tau \in \mathbf{R}_{++})$$

在 $(u, +\infty)$ 上是弱单调的. 易得 $\varphi(\tau)$ 关于 τ 的导数为 $\varphi'(\tau) = a - \frac{b}{\tau^2}$. 利用向量值函数的中值定理可得

$$\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) = \varphi'(\xi)(\tau_1 - \tau_2), \quad \xi \in (\tau_2, \tau_1), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}_{++} \text{ 且 } \tau_1 > \tau_2.$$

令 $u = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$, 其中 a_i 和 b_i 分别是 a 和 b 的第 i 个分量, 则有

$$\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) = \varphi'(\xi)(\tau_1 - \tau_2) = (a - \frac{b}{\xi^2})(\tau_1 - \tau_2) \in \mathbf{R}_{++}^m, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in (u, +\infty) \text{ 且 } \tau_1 > \tau_2.$$

因此 $\varphi(\tau)$ 在区间 $(\max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\frac{p_i(x^k)}{B_i(x^k)}}, +\infty)$ 是弱单调的. 根据 Φ 的性质, x^k 的定义和 $x^k \in D'_1$, 可得

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \inf_{x \in D_1} \Phi(f(x)) \leq \Phi(f(x^{k+1})) \\ &\leq \Phi\left(f(x^{k+1}) + \tau_{k+1} B(x^{k+1}) + \frac{1}{\tau_{k+1}} p(x^{k+1})\right) \\ &= \Phi_{k+1} = \inf_{x \in D'_1} \Phi\left(f(x) + \tau_{k+1} B(x) + \frac{1}{\tau_{k+1}} p(x)\right) \\ &\leq \Phi\left(f(x^k) + \tau_{k+1} B(x^k) + \frac{1}{\tau_{k+1}} p(x^k)\right) \leq \Phi\left(f(x^k) + \tau_k B(x^k) + \frac{1}{\tau_k} p(x^k)\right) = \Phi_k, \end{aligned}$$

根据 Φ 的弱递增性质, $\tau_k > \tau_{k+1} > 0$, 以及 $B(x) \geq 0$, $p(x) \geq 0 (\forall x \in D'_1)$ 可得第二个不等式; 同时, 根据 $\phi(\tau) = \tau B(x^k) + \frac{1}{\tau} p(x^k)$ 在区间 $(\max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\frac{p_i(x^k)}{B_i(x^k)}}, +\infty)$ 上的弱单调性, 得到最后一个不等式.

(ii) 通过(i), 可知 $\{\Phi_k\} \subset \mathbf{R}$ 是具有下界的非递增序列, 因此当 $k \rightarrow \infty$ 时, Φ_k 收敛到某个 $\eta \in \mathbf{R}$. 证毕.

定理3.1 令 $\{x^k\} \subset \mathbf{R}^n$ 是算法MMIEPM生成的迭代序列, 该算法的实现需要弱次可加函数 $\Phi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, 向量值障碍函数 $B: D'_1 \rightarrow \mathbf{R}_+^m$, 向量值外点罚函数 $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ 和一系列满足 $\tau_k > \tau_{k+1} \geq s$ 的参数序列 $\{\tau_k\} \subset \mathbf{R}_{++}$, 其中 $s = \max_{1 \leq i \leq m} \sqrt{\frac{p_i(x^k)}{B_i(x^k)}}$. 若 $\bar{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的聚点, $\bar{x} \in \arg \min_{x \in D} \Phi(f(x))$. 进一步, $\bar{x}$ 是MOP的弱Pareto最优解; 如果 Φ 是强次可加的, 则 $\bar{x}$ 是MOP的Pareto最优解.

证 首先证明 $\bar{x}$ 是可行解, 即 $\bar{x} \in D$. 令 $\{x^{k_j}\}$ 是 $\{x^k\}$ 的一个收敛子序列, 则 $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{k_j} = \bar{x}$. 对于任意的 $j \in \{1, 2, \dots\}$, $x^{k_j} \in D'_1$, 则有 $g(x^{k_j}) < 0$. 根据 g 的连续性, 进一步可得对于任意的 j , 有 $g(\bar{x}) < 0$, 即

$$\bar{x} \in D_1. \quad (2)$$

结合引理3.1, Φ 的次可加性和弱递增性, 可得

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\right) &\leq \Phi\left(f(x^{k_j}) + \frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\right) + \Phi\left(-f(x^{k_j})\right) \\ &\leq \Phi\left(f(x^{k_j}) + \tau_{k_j}B(x^{k_j}) + \frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\right) + \Phi\left(-f(x^{k_j})\right) \\ &\leq \Phi\left(f(x^1) + \tau_1B(x^1) + \frac{1}{\tau_1}p(x^1)\right) + \Phi\left(-f(x^{k_j})\right).\end{aligned}$$

因此由 f 的连续性以及 $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{k_j} = \bar{x}$ 可知

$$\begin{aligned}\limsup_{j \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\right) &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left[\Phi\left(f(x^1) + \tau_1B(x^1) + \frac{1}{\tau_1}p(x^1)\right) + \Phi\left(-f(x^{k_j})\right) \right] \\ &= \Phi\left(f(x^1) + \tau_1B(x^1) + \frac{1}{\tau_1}p(x^1)\right) + \Phi\left(-f(\bar{x})\right) \\ &\leq \Phi\left(f(x^0) + \tau_1B(x^0) + \frac{1}{\tau_1}p(x^0)\right) + \Phi\left(-f(\bar{x})\right),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式的成立来自于 $x^0 \in D'_1$ 和 $x^1 \in \arg \min_{x \in D'_1} \Phi\left(f(x) + \tau_1B(x) + \frac{1}{\tau_1}p(x)\right)$. 则存在 j_0 , 使得

$$\Phi\left(\frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\right) < \left| \Phi\left(f(x^0) + \tau_1B(x^0) + \frac{1}{\tau_1}p(x^0)\right) + \Phi\left(-f(\bar{x})\right) \right| + 1, \quad \forall j \geq j_0.$$

因为对于任意的 k , 都有 $\frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j}) \geq 0$, 且 Φ 满足(1)式, 则存在 $T > 0$, 使得对于任意的 $j \geq j_0$, 都有 $\|\frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\| \leq T$. 又由于 $\{\frac{1}{\tau_{k_j}}\}$ 是正实数的发散序列, 故可推出

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} p(x^{k_j}) = 0.$$

因此由 p 的连续性可得 $p(\bar{x}) = 0$, 即 $\bar{x} \in D_2$. 结合(2)式可以得到 $\bar{x} \in D$.

由引理3.1可知, $\exists \eta \in \mathbf{R}$, 使得 $\Phi_k \rightarrow \eta$, 其中 $\Phi_k = \Phi\left(f(x^k) + \tau_kB(x^k) + \frac{1}{\tau_k}p(x^k)\right)$. 接下来证明 $\Phi^* = \eta$, 其中 $\Phi^* = \inf_{x \in D_1} \Phi\left(f(x)\right)$. 如果不成立, 则由引理3.1可得

$$\Phi^* < \eta.$$

结合(1)式, 则存在 $\tilde{x} \in D'_1$, 使得 $\Phi^* < \Phi\left(f(\tilde{x})\right) < \eta$. 另外通过 Φ 的连续性和当 $\tau_k \rightarrow 0$ 时, $\tau_kB(\tilde{x}) + \frac{1}{\tau_k}p(\tilde{x}) \rightarrow 0$ 可知

$$\Phi\left(f(\tilde{x}) + \tau_kB(\tilde{x}) + \frac{1}{\tau_k}p(\tilde{x})\right) < \eta. \quad (3)$$

再由 $\tilde{x} \in D'_1$ 可得

$$\Phi_k := \inf_{x \in D'_1} \Phi\left(f(x) + \tau_kB(x) + \frac{1}{\tau_k}p(x)\right) \leq \Phi\left(f(\tilde{x}) + \tau_kB(\tilde{x}) + \frac{1}{\tau_k}p(\tilde{x})\right).$$

结合(3)式可以推导出, 对于足够大的 k 有

$$\Phi_k < \eta.$$

这与引理3.1的结论(ii)相矛盾, 因此 $\Phi^* = \eta$.

以下证明 $\bar{x} \in \arg \min_{x \in D} \Phi\left(f(x)\right)$. 首先证 $\bar{x} \in \arg \min_{x \in D_1} \Phi\left(f(x)\right)$, 即 $\Phi\left(f(\bar{x})\right) = \Phi^*$. 如果不成立, 那么由 $\bar{x} \in D_1$ 和 Φ^* 的定义得到

$$\Phi\left(f(\bar{x})\right) > \Phi^*. \quad (4)$$

由 $\Phi^* = \eta$, 可以推出

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi\left(f(x^{k_j}) + \tau_{k_j}B(x^{k_j}) + \frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j})\right) - \Phi^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{k_j} - \Phi^* = \eta - \Phi^* = 0. \quad (5)$$

结合 $\tau_{k_j}B(x^{k_j}) \geq 0$ 和 $\frac{1}{\tau_{k_j}}p(x^{k_j}) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots$), Φ 的弱递增性, $\Phi\left(f(\cdot)\right)$ 的连续性以及(4)式,

可以得到

$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi\left(f(x^{k_j}) + \tau_{k_j} B(x^{k_j}) + \frac{1}{\tau_{k_j}} p(x^{k_j})\right) - \Phi^* \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi\left(f(x^{k_j})\right) - \Phi^* = \Phi\left(f(\bar{x})\right) - \Phi^* > 0$,
这与(5)式相矛盾. 因此 $\Phi\left(f(\bar{x})\right) = \Phi^*$. 结合 $\bar{x} \in D$ 和 $\Phi^* \leq \inf_{x \in D} \Phi\left(f(x)\right)$, 易得 $\Phi\left(f(\bar{x})\right) = \Phi^* = \inf_{x \in D} \Phi\left(f(x)\right)$, 即 $\bar{x} \in \arg \min_{x \in D} \Phi\left(f(x)\right)$. 由引理2.1的结论(i)可得 $\bar{x}$ 是(MOP)的一个弱Pareto解. 通过引理2.1的结论(ii), 可以同样证明MMIEPM的强版本.

§4 数值实验

本节所有实验均在一台配置为AMD Ryzen 5 4600U的CPU, Radeon显卡, 16G运行内存的64位Windows 10操作系统联想笔记本电脑上进行. 实验环境采用MATLAB R2017b.

首先应用MMIEPM求解一个包含等式和不等式约束的多目标优化问题.

例4.1 考虑多目标优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \frac{1}{2} - x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0, \\ x_1^2 - 3x_1 + 3 - x_2 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $f(x) = (x_1 + x_2, x_1^2 - x_2)^\top$.

选择函数 $\Phi(u) = \max_{1 \leq i \leq m} u_i$, 令初始点 $x^0 = (3, 3)^\top$, 设置允许误差 $\varepsilon = 10^{-4}$. 利用MMIEPM, 得到 $\Phi(x^{16}) = 2.0001$, $x^{16} = (1.0001, 0.9999)^\top$ 是例4.1的近似解. 每次迭代的数值结果如表1所示.

表 1 例4.1的计算结果

k	x^k	τ_k	$\ \tau_k B(x^k)\ $	$\ \frac{1}{\tau_k} p(x^k)\ $	Φ_k	f
1	$\begin{pmatrix} 0.9441 \\ 0.5371 \end{pmatrix}$	1.0000	2.9216	0.3852	4.0052	$\begin{pmatrix} 1.4812 \\ 0.3542 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.3478 \\ 0.5232 \end{pmatrix}$	0.5000	1.1230	0.1768	2.5857	$\begin{pmatrix} 1.8710 \\ 1.2934 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
16	$\begin{pmatrix} 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$	3.0518×10^{-5}	6.8234×10^{-5}	1.0790×10^{-5}	2.0001	$\begin{pmatrix} 2.0000 \\ 0.0002 \end{pmatrix}$

由于MMIEPM的罚函数包含向量值障碍函数, 因此下面将其用于解决仅包含不等式约束的多目标优化问题.

例4.2 考虑仅含不等式约束的多目标优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1 - x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $f(x) = (x_1 + x_2, x_1^2 - x_2)^\top$.

选择函数 $\Phi(u) = \sum_{i=1}^m 2^{u_i}$, 令初始点 $x^0 = (2, 1)^\top$. 设置允许误差 $\varepsilon = 10^{-4}$. 利用MMIEPM, 得到 $\Phi(x^{23}) = 4.0024$, $x^{23} = (1.0003, 0.0055)^\top$ 是问题例4.2的近似解. 每次迭代的数值结果如表2所示.

表 2 例4.2的计算结果

k	x^k	τ_k	$\ \tau_k B(x^k)\ $	$\ \frac{1}{\tau_k} p(x^k)\ $	Φ_k	f
1	$\begin{pmatrix} 1.6389 \\ 0.8907 \end{pmatrix}$	1.0000	1.9263	0	24.6446	$\begin{pmatrix} 2.5295 \\ 1.7953 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1.4564 \\ 0.6804 \end{pmatrix}$	0.5000	1.3192	0	13.9155	$\begin{pmatrix} 2.1368 \\ 1.4407 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	$\begin{pmatrix} 1.0003 \\ 0.0055 \end{pmatrix}$	2.3842×10^{-7}	8.447010^{-4}	0	4.0024	$\begin{pmatrix} 1.0058 \\ 0.9951 \end{pmatrix}$

注意到MMIEPM只能得到多目标优化问题的一个Pareto最优解. 因此下面通过调整参数值以获取该优化问题的最优解集合.

例4.3 考虑多目标优化问题

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in D,$$

其中 $f(x) = (x, x^2 - 4x)^\top$, $D = [0, +\infty]$. $f(x)$, D 和该问题的Pareto最优解集的图像如图1所示.

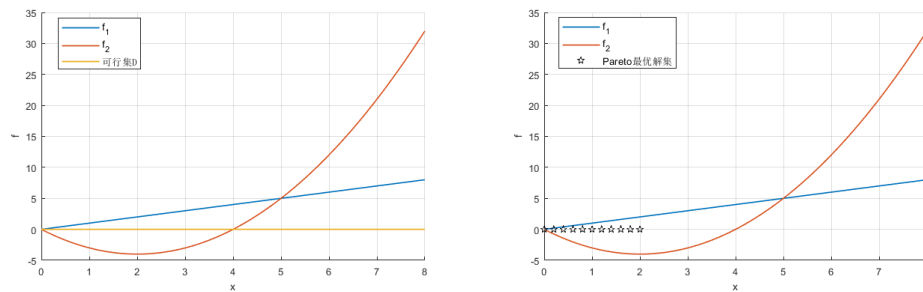


图 1 例4.3的图像: 可行集和Pareto最优解集

选择函数

$$\Phi_w(u) = \max_{i=1,2} \{u_i + w_i\}, w \in \mathbf{R}^2.$$

由于 f_1, f_2 是 $[2, +\infty]$ 上的递增函数, 因此当 $w = (0, 0)^\top$ 时, $\Phi_w(f(x))$ 在 $x = 2$ 处有一个严格的最小值点. 当 $w_\alpha = (\alpha, 0)^\top$, $\alpha \in [-6, 0]$ 时, 讨论 $\arg \min_{x \in D} \Phi_w(f(x))$. 对于固定的 α , $\Phi_{w_\alpha}(f(x))$ 在点 $x_\alpha \in [0, 2]$ 处有唯一的最小值, 其中 $f_1(x_\alpha) + \alpha = f_2(x_\alpha)$, 即 $x_\alpha = \frac{5 - \sqrt{25 + 4\alpha}}{2}$. 故

$$\bigcup_{-6 \leq \alpha \leq 0} \arg \min \Phi_{w_\alpha}(f(x)) = [0, 2].$$

其中 $w_\alpha \in [-6, 0] \times \{0\}$.

§5 约束多目标优化问题的混合罚函数方法的应用

本节首先简要介绍多指标交通网络均衡模型, 随后探讨MMIEPM算法在多指标交通网络最小费用流问题中的应用.

多目标交通网络均衡模型用于评估交通网络中的交通流量和相关多个指标的出行成本. 在交通网络中, 节点集和有向弧集分别用 N 和 E 表示. $c_\alpha > 0$ 表示弧 $\alpha \in E$ 的容量. $C = (c_\alpha)_{\alpha \in E}$ 表示容量向量. 起讫(原点-目的地, 简称O-D)对集合记为 W , 需求向量记为 $D = (d_w)_{w \in W}$, 其中 $d_w > 0$ 表示O-D对 w 的交通流量需求. 设 Q_w 表示连接O-D对 w 的可用路径集. 设 $\sum_{w \in W} |Q_w| = m$ 和 $Q = \bigcup_{w \in W} Q_w$. 给定路径 $k \in Q$, 设 h_k 为交通流, 则称 $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbf{R}^m$ 为路径流. 弧流量需要满足如下所示的容量约束.

$$0 \leq v_\alpha \leq c_\alpha, \quad \forall \alpha \in E,$$

其中

$$v_\alpha = \sum_{w \in W} \sum_{k \in Q_w} \delta_{\alpha k} h_k.$$

若路径 k 包含弧 α , 则 $\delta_{\alpha k} = 1$; 否则, $\delta_{\alpha k} = 0$. 路径流向量 h 满足需求约束 $\sum_{k \in Q_w} h_k = d_w$. 若路径流 h 同时满足需求约束和容量约束, 则称其为可行路径流. 令

$$H := \{h \in \mathbf{R}_+^m \mid \sum_{k \in Q_w} h_k = d_w, \forall w \in W; c_\alpha \geq v_\alpha \geq 0, \forall \alpha \in E\}$$

表示可行流集合.

设 $l_\alpha(h_k) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^r$ 是路径 k 在弧 α 上的向量值费用函数, 而 $\zeta_k(h_k) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^r$ 是路径 k 上的向量值费用函数. 两者关系可表述为

$$\zeta_k(h_k) = \sum_{\alpha \in E} \delta_{\alpha k} l_\alpha(h_k).$$

因此多指标交通网络均衡问题的最小费用流问题定义为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{w \in W} \sum_{k \in Q_w} \zeta_k(h_k) \\ \text{s.t.} \quad & h \in H. \end{aligned}$$

例5.1 如图2所示的交通网络费用流问题中, 节点集 $N = \{1, 2, 3, 4\}$, 有向弧集 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 弧容量向量 $C = (3, 2, 3, 3, 4)^\top$, O-D对集合 $W = \{(1, 4), (3, 4)\}$, 需求向量 $D = (3, 4)$.

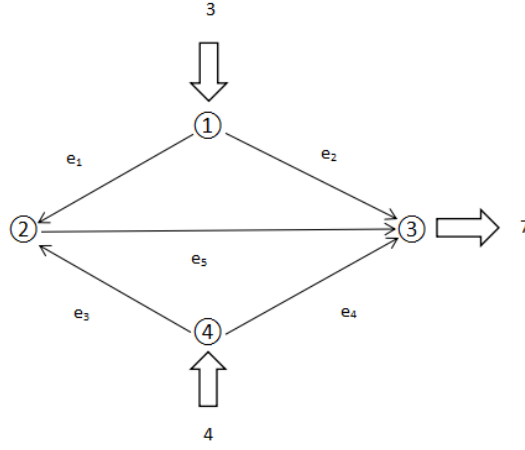


图 2 例5.1 的交通拓扑图

从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的弧费用函数定义为

$$l_{e_1}(h_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}h_1^2 + 1 \\ h_1^2 \end{pmatrix}, l_{e_2}(h_2) = \begin{pmatrix} h_2^2 + 3h_2 + 5 \\ h_2^3 + 4h_2 + 2 \end{pmatrix}, l_{e_3}(h_3) = \begin{pmatrix} h_3^2 + 2 \\ h_3^2 + 3 \end{pmatrix},$$

$$l_{e_4}(h_4) = \begin{pmatrix} h_4 + 4 \\ h_4 + 5 \end{pmatrix}, l_{e_5}(h_1) = \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_1 \end{pmatrix}, l_{e_5}(h_3) = \begin{pmatrix} h_3^2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

从而可得每个路径上的向量值费用函数

$$\zeta_1(h_1) = l_{e_1}(h_1) + l_{e_5}(h_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}h_1^2 + 1 \\ h_1^2 + h_1 \end{pmatrix}, \zeta_2(h_2) = l_{e_2}(h_2) = \begin{pmatrix} h_2^2 + 3h_2 + 5 \\ h_2^3 + 4h_2 + 2 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_3(h_3) = l_{e_3}(h_3) + l_{e_5}(h_3) = \begin{pmatrix} 2h_3^2 + 2 \\ h_3^2 + h_3 + 3 \end{pmatrix}, \zeta_4(h_4) = l_{e_4}(h_4) = \begin{pmatrix} h_4 + 4 \\ h_4 + 5 \end{pmatrix}.$$

向量最小费用流问题可以表示为

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \sum_{w \in W} \sum_{k \in Q_w} \zeta_k(h_k) \\ &= \left(\frac{3}{2}h_1^2 + h_2^2 + 3h_2 + 2h_3^2 + h_4 + 12, h_1^2 + h_1 + h_2^3 + 4h_2 + h_3^2 + h_4 + 10 \right)^\top \\ &\quad \text{s.t.} \begin{cases} 0 \leq h_1 \leq 3, \\ 0 \leq h_2 \leq 2, \\ 0 \leq h_3 \leq 1, \\ 0 \leq h_4 \leq 4, \\ 0 \leq h_1 + h_3 \leq 3, \\ h_1 + h_2 = 3, \\ h_3 + h_4 = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

选择函数 $\Phi(u) = \sum_{i=1}^m u_i$, 初始点 $h^0 = (1, 1, 0.5, 1)^\top$. 设置允许误差 $\varepsilon = 10^{-4}$. 利用MMIEPM, 得到 $\Phi(h^{22}) = 50.8484$, $h^{22} = (2.0783, 0.9217, 0.2153, 3.7847)^\top$ 是问题的近似解. 该算法的运行时间总共为0.0304秒. 然而当使用线性加权法处理目标函数并选择权重参数 $z_k = (0.5, 0.5)^\top$ 时, 借助fmincon函数运行标量问题, 得到最优解的计算时间为0.1287秒. 这表明MMIEPM的时间成本比一般的标量化算法更低. 此外图3展示了迭代点 h^k 各分量的变化趋势, 而每次迭代的数值结果则如表3所示.

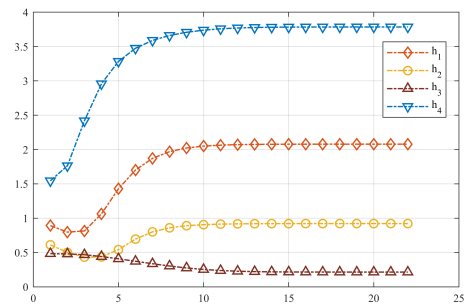


图 3 迭代点 h^k 各分量的变化趋势

表 3 例5.1的计算结果

k	h^k	τ_k	$\ \tau_k B(h^k)\ $	$\ \frac{1}{\tau_k} p(h^k)\ $	Φ_k	f
1	$\begin{pmatrix} 0.8925 \\ 0.6121 \\ 0.4839 \\ 1.5442 \end{pmatrix}$	9.80×10^{-2}	37.1915	1.1213	76.8599	$\begin{pmatrix} 17.2975 \\ 16.6291 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0.7974 \\ 0.5016 \\ 0.4797 \\ 1.7635 \end{pmatrix}$	2	19.1630	2.1152	57.3498	$\begin{pmatrix} 16.8143 \\ 16.0393 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
22	$\begin{pmatrix} 2.0783 \\ 0.9217 \\ 0.2153 \\ 3.7847 \end{pmatrix}$	1.9073×10^{-6}	3.0107×10^{-5}	6.1909×10^{-5}	50.8484	$\begin{pmatrix} 25.9347 \\ 24.9137 \end{pmatrix}$

§6 总结

基于Fukuda等人^[24-25]在多目标优化问题上罚函数方法的开创性工作, 本文提出了经典内-外混合罚函数方法的向量值版本MMIEPM, 并证明了该算法生成的迭代序列收敛于问题的Pareto最优解或弱Pareto最优解. 同时通过数值实验验证了MMIEPM的有效性. 最后将MMIEPM应用于多指标交通网络最小费用流问题, 并与线性加权法进行比较, 结果显示MMIEPM在时间成本方面具有明显优势. 然而本文提出的MMIEPM仅能获得问题的一

个Pareto最优解或弱Pareto最优解。因此如何利用MMIEPM生成问题的完整Pareto前沿或弱Pareto前沿是未来研究的一个方向。

参考文献:

- [1] Liu Hui, Li Ye, Duan Zhu, et al. A review on multi-objective optimization framework in wind energy forecasting techniques and applications[J]. *Energy Conversion and Management*, 2020, 224: 113324.
- [2] Zhao Hong, Chen Zonggan, Zhan Zhihui, et al. Multiple populations co-evolutionary particle swarm optimization for multi-objective cardinality constrained portfolio optimization problem[J]. *Neurocomputing*, 2021, 430: 58-70.
- [3] AKim J H, Lee Y, Kim W C, et al. Goal-based investing based on multi-stage robust portfolio optimization[J]. *Annals of Operations Research*, 2022, 313(2): 1141-1158.
- [4] Tavana M. A subjective assessment of alternative mission architectures for the human exploration of mars at nasa using multicriteria decision making[J]. *Computers and Operations Research*, 2004, 31(7): 1147-1164.
- [5] Johannes J. Scalarization in vector optimization[J]. *Mathematical Programming*, 1984, 29(2): 203-218.
- [6] Eichfelder G. An adaptive scalarization method in multiobjective optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, 19(4): 1694-1718.
- [7] Fliege J, Svaiter B F. Steepest descent methods for multicriteria optimization[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, 51(3): 479-494.
- [8] Drummond L M G, Svaiter B F. A steepest descent method for vector optimization[J]. *Journal of computational and applied mathematics*, 2005, 175(2): 395-414.
- [9] Cocchi G, Liuzzi G, Lucidi S, et al. On the convergence of steepest descent methods for multiobjective optimization[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2020, 77(1): 1-27.
- [10] Fliege J, Drummond L M G, Svaiter B F. Newton's method for multiobjective optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, 20(2): 602-626.
- [11] Wang Jinhua, Hu Yaohua, Wai Yu C K, et al. Extended newton methods for multiobjective optimization: majorizing function technique and convergence analysis[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2019, 29(3): 2388-2421.
- [12] Gonçalves M L N, Lima F S, Prudente L F. Globally convergent Newton-type methods for multiobjective optimization[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2022, 83(2): 403-434.
- [13] Bonnel H, Iusem A N, Svaiter B F. Proximal methods in vector optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2005, 15(4): 953-970.
- [14] Bento G C, Cruz Neto J X, López G. The proximal point method for locally Lipschitz functions in multiobjective optimization with application to the compromise problem[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2018, 28(2): 1104-1120.
- [15] Tanabe H, Fukuda E H, Yamashita N. Proximal gradient methods for multiobjective optimization and their applications[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2019, 72(2): 339-361.
- [16] Bello-Cruz Y, Melo J G, Serra R V G. A proximal gradient splitting method for solving convex vector optimization problems[J]. *Optimization*, 2022, 71(1): 33-53.

- [17] Tanabe H, Fukuda E H, Yamashita N. Convergence rates analysis of a multiobjective proximal gradient method[J]. Optimization Letters, 2023, 17(2): 333-350.
- [18] Drummond L M G, Iusem A N. A projected gradient method for vector optimization problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2004, 28(1): 5-29.
- [19] Fazzio N S, Schuverdt M L. Convergence analysis of a nonmonotone projected gradient method for multiobjective optimization problems[J]. Optimization Letters, 2019, 13(6): 1365-1379.
- [20] Lucambio Pérez L R, Prudente L F. Nonlinear conjugate gradient methods for vector optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2018, 28(3): 2690-2720.
- [21] Ryu J H, Kim S. A derivative-free trust-region method for biobjective optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2014, 24(1): 334-362.
- [22] Carrizo G A, Lotito P A, Maciel M C. Trust region globalization strategy for the nonconvex unconstrained multiobjective optimization problem[J]. Mathematical Programming, 2016, 159(1): 339-369.
- [23] Fliege J, Vaz A I F. A method for constrained multiobjective optimization based on sqp techniques[J]. SIAM Journal on Optimization, 2016, 26(4): 2091-2119.
- [24] Fukuda E H, Drummond L M G, Raupp F M P. An external penalty-type method for multicriteria[J]. TOP, 2016, 24(2): 493-513.
- [25] Fukuda E H, Drummond L M G, Raupp F M P. A barrier-type method for multiobjective optimization[J]. Optimization, 2020, 69(11): 2471-2487.
- [26] Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms[M]. New York: Wiley, 2013.
- [27] Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [28] John J. Vector Optimization, Theory, Application, and Extensions[M]. Berlin: Springer, 2004.

A mixed interior-exterior penalty method for constrained multiobjective optimization problems

SHI Si, XU Yang-dong, SUN Yue-ming

(School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: This paper proposes a mixed interior-exterior penalty method for solving multi-objective optimization problems involving both equality and inequality constraints. The penalty function in this method consists of the objective function, an internal penalty function, and an external penalty function for the feasible set. Under some suitable conditions, it is proved that the sequence generated by the algorithm converges to a Pareto or a weak Pareto optimal solution in terms of auxiliary monotone functions. In addition, three numerical experiments are given to verify the feasibility of the proposed algorithm. Finally, the algorithm is applied to solve a vector minimum cost flow problem in a traffic network, and a comparative analysis with the linear weighting method highlights the time cost advantages of the proposed algorithm.

Keywords: multi-objective optimization; mixed interior-exterior penalty method; Pareto optimal solution; multi-criteria traffic equilibrium network problem

MR Subject Classification: 90C29; 90C30