

# 区间函数型数据构权方法研究

孙利荣<sup>1</sup>, 郑 驰<sup>1</sup>, 毛浩峰<sup>1</sup>, 宋秀迎<sup>2\*</sup>

(1. 浙江工商大学 统计与数学学院, 浙江杭州 310018;

2. 浙江工商大学 杭州商学院, 浙江杭州 310018)

**摘要:** 针对由数据量过大而引起的函数型综合评价信息损失或是计算复杂度过大等问题, 文中提出了一种基于区间函数型数据的综合评价方法, 并针对区间函数型数据表支持的综合评价问题的特殊性, 提出了一种新的确定权重系数的“全局”拉开档次法. 相较于函数型综合评价, 区间函数型综合评价在呈现连续的函数特征同时, 增加了区间化的步骤, 能够更好地挖掘数据信息, 提升综合评价的效率. 最后通过以义乌小商品景气指数为例, 分别使用函数型数据形式和区间函数型数据形式下的“全局”拉开档次法对其进行赋权, 进而进行评价研究. 结果表明该文提出的区间函数型综合评价方法更具优势.

**关键词:** 综合评价; 函数型数据; 区间函数型数据; 构权; “全局”拉开档次法

**中图分类号:** O212.1

**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4424(2024)02-0127-14

## §1 引言

综合评价是对评价对象多方面数量特征进行综合的一种方法, 可以直接对复杂数据形式进行有效评价, 因而被广泛应用于各类社会经济现象研究<sup>[1-8]</sup>. 对多属性体系问题进行综合评价是一个整体分析的过程, 包含数据处理, 方法运用和结果探究等.

综合评价的研究形式越来越丰富, 可将研究方向分为两个内容, 一方面是针对评价指标体系的研究, 即某类问题, 一种是针对评价方法的研究, 即共性问题<sup>[9]</sup>. 静态数据是人们收集并记录最早的数据形式, 因此对于事物发展的研究也从该数据形式开始, 现有的综合评价方法, 如主成分分析法, 聚类分析法, 灰色关联分析法等都在此基础上有丰富的研究<sup>[10]</sup>. 随着数据逐年逐月的累计, 数据形式慢慢的就变成了面板数据和时间序列数据这类动态数据形式, 由于这类数据随时间的变化会呈现一定的规律和变化且其综合评价问题具有动态性, 人们开始了动态综合评价的研究, 郭亚军等<sup>[11]</sup>系统地定义了动态综合评价概念, 并给出动态综合评价的整体框架, 提出可应用于动态指标数据的“纵横向”拉开档次法. 在进一步的发展过程中, 人们希望对事物的分析

收稿日期: 2022-10-31 修回日期: 2023-05-25

\*通讯作者, E-mail: sxy690435@163.com

基金项目: 国家社科基金(21BTJ004)

不是单一化的,综合评价的合理性也能突破其限制有更好的发展,区间数就应运而生,陈骥<sup>[12]</sup>对区间数的综合评价问题进行了详细的讨论,并验证该数据形式下综合评价的科学性和合理性,确定了区间数综合评价的整体框架.随着区间数的发展更加深入,人们希望区间数能够呈现具有动态特点,以此来反映事物发展的动态变化,因此区间动态决策的方法也有了相关研究<sup>[13]</sup>.他们在直觉模糊集理论的基础上提出了区间直觉模糊集动态规划法的思路及计算步骤,并验证其可行性,但没有给出区间动态的综合评价系统研究.

随着获取和存储数据的手段不断提高,科研领域涌现大量复杂各异的数据集,函数型数据就是其中的一种,其数据呈现连续,动态的函数曲线以及曲面的特征如金融市场的股票逐笔交易价格,生物统计中的基因表达,人口统计中的出生率和死亡率.Ramsay J O<sup>[14]</sup>提出相关概念,并且与Dalzell C J<sup>[15]</sup>对函数型数据分析(Functional Data Analysis,简称FDA)做系统的阐述和研究,随后函数型数据的研究内容日益丰富,且逐渐成为研究热点,并在此期间出现了大量的相关理论和经验分析,将其应用于不同领域<sup>[16-21]</sup>.

然而,信息数据的爆炸型增长和数据形式的日益丰富,函数型数据形式不再能满足实际情况.如对行业数据进行多指标综合评价分析时,由于不同行业有其自身特点,若只用点值数据代表整个行业在某个指标下某个时刻的值,是不合理的.对于高频数据,使用函数型综合评价分析方法不仅会使计算负荷较大,也会降低评价分析的准确性.另外若直接对时间跨度长的样本的频率进行分析,需要使用多个函数型来刻画数据变化特征.因此区间函数形式的数据应运而生.将每个时期内的时间点作为水平变量,通过离散数据函数化,每个区间都可获得对应一条曲线,则各个个体的每个时期的数据就成为了区间函数型数据.该类数据使得综合评价过程具有区间动态性.已有相关文献对该形式结合综合评价方法对现实问题进行分析,如Shimizu N<sup>[22]</sup>将层次聚类方法应用于区间函数型数据,并讨论了数据构建和数据分析的不同标准,将其运用于实际情况中.Nasirzadeh R等<sup>[23]</sup>介绍了五种拟合区间值函数型数据的函数型线型回归模型,并提出一种响应是区间值标量随机变量而预测变量是区间值函数的函数型线型回归模型;Nasirzadeh R等<sup>[24]</sup>使用核函数提出了两个非参数回归模型用来预测区间值函数型数据,并基于此提出了Nadaraya-Watson类型的局部线性回归和核回归估计.Beyaztas U等<sup>[25]</sup>提出了一些著名的区间值数据回归模型的函数形式,并检验了它们的预测性能.然后提出了一种基于函数对函数回归模型,其中响应和预测都是现实生活中常见的函数,并通过蒙特卡罗模拟和经验数据分析,对所提出的区间值函数回归模型的有限样本性能进行了评估.

对于区间函数型数据的研究集中于评价方法和数据形式的结合,并用于实际情况的分析,但对该形式下的评价函数等进一步的研究讨论还没有系统给出,且国内外对区间函数型数据的研究较少.因此本文将基于区间函数型指标数据形式提出一种新的确定权重系数的“全局”拉开档次法,该方法在针对高频数据时不仅能有一个较为精准的评估,同时也反应出不同信息数据之间的相关性以及变化特征,有助于理解信息数据背后的实际意义.

本文在原有的基于函数型数据的“全局”拉开档次法的基础上,结合最大最小值法和中点半径法确定区间函数形式,提出一种基于区间函数型数据的“全局”拉开档次法,主要贡献为:1.将区间函数型指标数据引入拉开档次法相关研究,丰富了拉开档次法适用的指标数据形式,也为多指标区间函数型数据提供了一种合理的评价模式.2.用区间函数型数据形式能更有效地反映综合评价的合理性.同一评价对象的评价结果在不同时间段内会发生改变,将样本数据区间化,进而函数化,做出相应的综合评价分析,使得评价过程具有区间动态性,同时也反映出评价

结果的科学性, 合理性. 此外文中利用Matlab编程, 将区间函数型数据综合评价的评价过程变成一个模式化过程, 其中包含了区间指标函数的生成及无量纲化处理, 区间函数型数据表下权数的求解, 评价函数进一步的分析. 代码的简化使得该模型具有很高的可操作性, 有利于利用区间函数型数据综合评价去解决实际问题, 且参数的可更改性, 使其能够获得更符合评价问题的结论.

## §2 区间函数型数据分析

### 2.1 函数型数据分析

假定在连续时间观测区间 $T$ 内, 评价对象 $i$ 的第 $j$ 个指标函数 $x_{ij}(t), t \in T$ 有 $n$ 组观测数据 $x_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijN}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ , 满足模型

$$x_{ijl} = x_{ij}(t_l) + \xi_{ij}(t_l). \quad (1)$$

其中 $l = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$ 表示观测区间 $T$ 内的观测点数,  $x_{ijl}$ 为评价指标函数 $x_{ij}(t)$ 在时刻 $l$ 的一个观测值,  $x_{ij}(t_l)$ 表示评价指标函数 $x_{ij}(t)$ 在时刻 $t_l$ 的取值,  $\xi_{ij}(t_l)$ 表示误差, 扰动因素.

函数型数据分析的首要步骤就是对数据进行平滑处理, 现实中采集所得往往为离散数据, 通常采用基函数平滑法进行处理. 又以表现形式的不同, 用傅里叶基函数处理周期型数据, 用 $B$ 样条基函数处理非周期型数据. 令 $\{\phi_k\}_{k=1}^K$ 是空间 $L^2$ 的一组基函数, 则有唯一一组系数向量 $C'_{ij} = (c_{ij1}, c_{ij2}, \dots, c_{ijK}) \in l^2$ , 其中 $K$ 表示基函数的个数, 则函数型数据具体表现形式为

$$\tilde{x}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^K c_{ijk} \phi_k(t). \quad (2)$$

其中 $L^2$ 是二次可积函数空间,  $l^2$ 为对应的序列空间,  $\{x_{ij}(t), t \in T, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$ 是定义在 $T$ 上的随机过程, 则观测曲线也可看作随机过程的实现. 在拟合函数首先确定基函数的个数和阶数, 本文根据误差平方和(SSE)和广义交叉验证值(GCV)来进一步确定基函数个数和惩罚参数, 具体表达式为

$$\text{SSE}_{ij} = \sum_{l=1}^N [x_{ij}(t_l) - \tilde{x}_{ij}(t_l)]^2, \quad (3)$$

$$\text{GCV}(\lambda)_{ij} = \frac{\frac{\text{SSE}_{ij}}{N}}{\left(\frac{N-df}{N}\right)^2} = \left(\frac{N}{N-df}\right) \times \left(\frac{\text{SSE}_{ij}}{N-df}\right). \quad (4)$$

其中 $df = \text{tr}(\mathbf{S}_{\varnothing, \lambda}) = \text{tr}[\Phi(\Phi'\Phi + \lambda R)^{-1}\Phi']$ ,  $\text{tr}$ 表示该矩阵的迹,  $\Phi = \{\phi_k(t_l)\}_{k,l=1}^{K,N}$ ,  $R = \int D^z \phi(t) D^z \phi(t)' dt$ 为粗糙惩罚矩阵<sup>[19]</sup>.

由于本文对所有指标使用相同的基函数和相同的惩罚参数原则构建函数型数据, 进一步采用平均误差平方和和平均广义交叉验证值来确定基函数个数和惩罚参数大小, 具体公式为

$$\text{MSSE} = \frac{1}{m \times n \times N} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^N [x_{ij}(t_l) - \tilde{x}_{ij}(t_l)]^2, \quad (5)$$

$$\text{MGCV} = \frac{1}{m \times n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{GCV}(\lambda)_{ij}. \quad (6)$$

不同拟合函数过程中的惩罚参数(平滑参数)选择有所不同, 一般为了简单起见, 在拟合过程中选择相同个数与阶数的基函数和惩罚参数. 获得拟合函数后, 通过最小化具有误差平方和或

惩罚残差平方和和获得变量系数, 因此误差平方和(SSE)为

$$\sum_{l=1}^N \left[ x_{ij}(t_l) - \sum_{k=1}^K c_{ijk} \phi_k(t_l) \right]^2 = (x_{ij} - \Phi c_{ij})' (x_{ij} - \Phi c_{ij}) = \|x_{ij} - \Phi c_{ij}\|_R^2, \quad (7)$$

其中  $\tilde{X}'_{ij} = (\tilde{x}_{ij}(t_1), \tilde{x}_{ij}(t_2), \dots, \tilde{x}_{ij}(t_N))$ ,  $C'_{ij} = (c_{ij1}, c_{ij2}, \dots, c_{ijK})$ , 并通过解最小化问题可以得到, 具体计算公式为

$$c_{ij} = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' x_{ij}, \quad (8)$$

惩罚残差平方和为

$$\sum_{l=1}^N \left[ x_{ij}(t_l) - \sum_{k=1}^K c_{ijk} \phi_k(t_l) \right]^2 + \lambda \int [Dx_{ij}^z(t)]^2 dt, \quad (9)$$

其中第一项为残差平方和, 表示函数  $x_{ij}(t)$  的拟合精度; 第二项为粗糙惩罚项用来衡量函数  $x_{ij}(t)$  的平滑程度,  $z$  (一般取2) 为导数的阶数,  $\lambda$  是惩罚参数, 在基函数的框架下,  $\lambda$  是一个参数向量, 具体数值可以通过交叉验证法则(LOO-CV)或广义交叉验证法则(LOO-GCV)进行选择, 它们的具体表达形式为

$$\text{GCV}(\lambda) = \frac{n \text{tr} [Y' (I - S_{\phi, \lambda})^{-2} Y]}{[\text{tr} (I - S_{\phi, \lambda})]^2}, \quad (10)$$

其中  $S_{\phi, \lambda} = \phi M(\lambda)^{-1} \phi' W$ ,  $W$  是用于处理残差项协方差矩阵的各种可能结构的加权矩阵,  $M(\lambda)^{-1} = \phi' W \phi + \lambda R$ ,  $R = \int D^z \phi(t) D^z \phi(t)' dt$  为粗糙惩罚矩阵.

## 2.2 区间函数型数据分析

区间函数型数据可以认为是区间型符号数据连续化的结果, 记作  $X(t) = [x^l(t), x^u(t)]$ , 其中  $x^l(t)$  和  $x^u(t)$  可以看作是区间函数  $X(t)$  的下限函数和上限函数, 且有  $x^l(t) \leq x^u(t)$ . 由于区间数欧氏距离无法直接适用于区间函数形式, 先对其进行拓展, 给出基于基函数展开的区间函数欧氏距离的计算方法, 具体步骤如下.

设有  $n$  个观测样本,  $m$  个指标变量,  $N$  个观测时间点, 则评价指标函数  $x_{ij}(t)$  在观测时期  $T$  内的取值可表示为向量  $x_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijl}, \dots, x_{ijN})'$ ,  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, N$ . 按一定的标准如以周为单位对其进行区间化处理, 可得到  $S$  ( $S \leq N$ ) 个区间数据组成的数据向量  $x_{ij}^* = (x_{ij1}^*, x_{ij2}^*, \dots, x_{ijp}^*, \dots, x_{ijS}^*)'$ ,  $i = 1, 2, \dots, n; x_{ijp}^* = [x_{ijp}^l, x_{ijp}^u]$  表示第  $i$  个样本通过区间化得到的第  $p$  个区间数,  $p = 1, 2, \dots, S$ ,  $x_{ijp}^l$  和  $x_{ijp}^u$  分别表示区间数的下限和上限.

分别将预处理得到的区间数下限及上限离散型数据通过基函数平滑法拟合光滑曲线, 得到第  $i$  个区间函数的下限函数  $x_{ij}^l(t)$  和第  $i$  个区间函数的上限函数  $x_{ij}^u(t)$ , 可用基函数表示为  $x_{ij}^l(t) = \sum_{k=1}^K c_{ijk}^l \phi_k(t)$ ,  $x_{ij}^u(t) = \sum_{k=1}^K c_{ijk}^u \phi_k(t)$ , 其中  $c_{ijk}^l$  为第  $i$  个区间数样本下限数据拟合函数的第  $k$  个基函数系数,  $c_{ijk}^u$  为第  $i$  个区间数样本上限数据拟合函数的第  $k$  个基函数系数.

给出一组区间函数  $X(t) = (x_{ij}^l(t), x_{ij}^u(t))$ , 则中点函数和半径函数可分别表示为

$$x_{ij}^c(t) = \frac{x_{ij}^l(t) + x_{ij}^u(t)}{2}, \quad (11)$$

$$x_{ij}^r(t) = \frac{x_{ij}^u(t) - x_{ij}^l(t)}{2}. \quad (12)$$

## §3 区间函数型数据的综合评价

### 3.1 区间函数型数据的综合评价定义

区间函数型数据是函数型数据结合区间数的特点进行拓展的, 可以理解为是区间数与函数型数据的结合体, 它既有区间数的特点, 又有函数型数据的特点, 因此, 区间函数型数据的推导从区间形式的构造开始. 区间数的确定最重要的是确定取值区间和分布信息, 并且其构造从两个方向切入, 一是由点值构造区间, 二是由区间变成区间. 在实际生活中, 一般是通过点值选取区间数的上限值和下限值. 本节给出了中点半径形式的综合评价一般过程.

在以中点半径表示区间形式时, 中点代表了区间位置, 半径代表区间的变化范围, 对其进行综合评价方法的应用, 最后得出的评价也按区间形式表示, 且围绕中点评价价值变动.

在上述分析中通过计算已经得到中点值和半径值, 具体见式(11)与式(12), 对其进行平滑处理, 得到中点函数型数据和半径函数型数据, 将其构造成区间形式, 由此便是基于中点半径值的区间函数型数据表, 如表1所示.

表1 以中点半径值为基础的区间函数型数据表

指标数据	$\tilde{X}_1$	$\tilde{X}_2$	...	$\tilde{X}_m$
时间	$t_1, t_2, \dots, t_N \in T$	$t_1, t_2, \dots, t_N \in T$	...	$t_1, t_2, \dots, t_N \in T$
$s_1$	$[\tilde{x}_{11}^c(t), \tilde{x}_{11}^r(t)]$	$[\tilde{x}_{12}^c(t), \tilde{x}_{12}^r(t)]$	...	$[\tilde{x}_{1m}^c(t), \tilde{x}_{1m}^r(t)]$
$s_2$	$[\tilde{x}_{21}^c(t), \tilde{x}_{21}^r(t)]$	$[\tilde{x}_{22}^c(t), \tilde{x}_{22}^r(t)]$	...	$[\tilde{x}_{2m}^c(t), \tilde{x}_{2m}^r(t)]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$s_n$	$[\tilde{x}_{n1}^c(t), \tilde{x}_{n1}^r(t)]$	$[\tilde{x}_{n2}^c(t), \tilde{x}_{n2}^r(t)]$	...	$[\tilde{x}_{nm}^c(t), \tilde{x}_{nm}^r(t)]$

其中 $\tilde{x}_{ij}^c(t)$ 为评价指标函数 $x_{ij}(t)$ 在时间 $t$ 下的中点函数型数据形式,  $\tilde{x}_{ij}^r(t)$ 为评价指标函数 $x_{ij}(t)$ 在时间 $t$ 下的半径函数型数据形式.

根据中点和半径所表示的含义, 可以得到该形式下综合评价的一般表现形式为

$$y_i(t) = [\omega_1^c(t)\tilde{x}_{i1}^c(t) - \omega_1^r(t)\tilde{x}_{i1}^r(t), \omega_1^c(t)\tilde{x}_{i1}^c(t) + \omega_1^r(t)\tilde{x}_{i1}^r(t)] + \dots + [\omega_m^c(t)\tilde{x}_{im}^c(t) - \omega_m^r(t)\tilde{x}_{im}^r(t), \omega_m^c(t)\tilde{x}_{im}^c(t) + \omega_m^r(t)\tilde{x}_{im}^r(t)], t \in T. \tag{13}$$

不考虑时间段内各时点对评价函数的影响, 可以得到平均评价价值

$$\bar{y}_i = \left[ \frac{1}{T} \left( \sum_{j=1}^m \int_T w_j^c \tilde{x}_{ij}^c(t) - w_j^r \tilde{x}_{ij}^r(t) dt \right), \frac{1}{T} \left( \sum_{j=1}^m \int_T w_j^c \tilde{x}_{ij}^c(t) + w_j^r \tilde{x}_{ij}^r(t) dt \right) \right]. \tag{14}$$

这里的中点评价函数就可以作为整体变化供分析和预测, 半径评价函数可以了解对象变化过程中的范围及范围的趋势.

### 3.2 函数型数据的“全局”拉开档次法

“全局”拉开档次法是在函数型数据的基础上对“纵横向”拉开档次法的拓展, 且已验证该方法的可行性和合理性. 通过实证分析来验证该方法与函数型数据的结合能够较好的凸显评价对象在变化过程中的发展, 利于对评价对象未来的发展做出更为准确的判断和预测结果. 本节采用基函数法对数据进行函数型数据的拟合, 该方法在函数型数据中最为常见, 且易于计算等处理, 下面介绍“全局”拉开档次法的计算过程.

假定有 $n$ 个评价对象 $s_1, s_2, \dots, s_n$ , 并且有 $j$ 个评价指标, 因此原始数据有 $\{x_{ij}(t)\}$ . 为了确定权重 $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)'$ , 需要在函数型数据表的基础上尽可能大的体现各评价对象之间的整体差异, 因此这里采用函数型数据的总离差平方和 $\sigma^2$ 来体现, 则总离差平方和的具体表达形式

为

$$\sigma^2 = \int_T \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i(t))^2 \right\} dt = \int_T W' H(t) W dt, \quad (15)$$

其中  $H(t) = X(t)' X(t)$  是对称矩阵,  $X(t)$  是标准化后的函数型数据矩阵, 具体表示为

$$X(t) = \{\tilde{x}_{ij}(t), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}.$$

为了确定矩阵函数, 需要确定基函数表现形式和平滑参数  $\lambda$ , 主要是根据文[26]中关于函数数据和多元统计分析中的研究讨论中确定. 一般只在两种思路中考虑, 一种是使所有样本均采用相同的基函数和平滑参数  $\lambda$ , 虽然将算法处理得简单易操作, 但在该方法中, 所得出的结论不能算最优解. 第二种是对所有的指标及样本采用相同的基函数和不同的平滑参数  $\lambda$ , 其中相同基函数能在一定程度上降低算法的难度, 而不同的平滑参数能够获取最优解, 且基函数的阶数和个数由第二节的离散函数化进行确定. 因此矩阵函数的具体表现形式为

$$X(t) = C' \Phi(t) = \begin{bmatrix} c^{11'} & c^{12'} & \dots & c^{1m'} \\ c^{21'} & c^{22'} & \dots & c^{2m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n1'} & c^{n2'} & \dots & c^{nm'} \end{bmatrix}_{n \times m} \begin{bmatrix} \phi_1(t) & & & \\ & \phi_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi_m(t) \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (16)$$

$$= [\tilde{X}_1(t), \tilde{X}_2(t), \dots, \tilde{X}_m(t)],$$

$\tilde{X}_j(t) = [c^{1j'} \phi_j(t), c^{2j'} \phi_j(t), \dots, c^{nj'} \phi_j(t)]' = [\tilde{x}_{1j}(t), \tilde{x}_{2j}(t), \dots, \tilde{x}_{nj}(t)]'$  是矩阵列向量中的第  $j$  个指标函数,  $\tilde{x}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{K_j} c_k^{ij} \phi_{jk}(t) = c^{ij'} \phi_j(t)$  为函数型数据,  $C^{ij'} = (c_1^{ij}, c_2^{ij}, \dots, c_{K_j}^{ij})$ ,  $\phi_j(t)$  则是基于  $K_j$  维的第  $j$  个指标函数基函数. 另外  $C'$  是  $n \times (\sum_{j=1}^m K_j)$  阶的复合系数矩阵,  $\Phi(t)$  是  $(\sum_{j=1}^m K_j) \times m$  阶的复合矩阵基函数,  $K_j$  是基函数  $\Phi_j(t)$  中所包含的基函数个数.

因此在函数型数据表的基础上, 对函数型数据进行标准化处理之后, 评价对象  $y_i(t)$  的总离差平方和可以由下列式子进行推导, 具体计算公式为

$$\sigma^2 = \int_T W' H(t) W dt = W' \left\{ \int_T \Phi(t)' H_c \Phi(t) dt \right\} W = W' H W. \quad (17)$$

根据上面的推导可知, 其中的  $H_c = C C'$  是一个  $(\sum_{j=1}^m K_j) \times (\sum_{j=1}^m K_j)$  阶的对称矩阵,  $H_C = \int_T \Phi'(t) C C' \Phi(t) dt$  则是一个  $m \times m$  维的对称矩阵.

**定理3.1** 取  $W$  为矩阵  $H$  的最大特征值所对应的特征向量时,  $\sigma^2$  需要取最大值<sup>[27]</sup>.

其中要注意, 虽然在理论上和实际期望中权数为正值, 但也可能会出现  $W$  中的权数为负数, 因此为了能够使得权数为正值, 则选择降低评价对象之间的整体差异, 并采用线性规划将  $W$  求解出来, 具体形式为

$$\begin{cases} \max & W' H W \\ \text{s.t.} & \|W\| = 1, \\ & W > 0. \end{cases} \quad (18)$$

### 3.3 区间函数型数据的“全局”拉开档次法—中点半径法

本节内容通过中点半径法的区间函数型数据进行展示, 介绍“全局”拉开档次法在中点半径法的区间函数型数据形式, 根据文[28]对区间数进行熵值法的讨论, 本节内容按照其权重计算形式, 分别对区间中点函数和半径函数进行构权. 假定有  $n$  个评价对象  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ,  $m$  个区间指标数据  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_m$ , 其中  $\tilde{X}_j = [\tilde{x}_{ij}^c(t), \tilde{x}_{ij}^r(t)]$ , 进而将中点函数和半径函数分别组成两个矩阵函数, 并用基函数形式表示, 具体为

$$\begin{aligned}
 X_c(t) = C'_c \Phi(t) &= \begin{bmatrix} c_{\text{center}}^{11'} & c_{\text{center}}^{12'} & \cdots & c_{\text{center}}^{1m'} \\ c_{\text{center}}^{21'} & c_{\text{center}}^{22'} & \cdots & c_{\text{center}}^{2m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\text{center}}^{n1'} & c_{\text{center}}^{n2'} & \cdots & c_{\text{center}}^{nm'} \end{bmatrix}_{n \times m} \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_m(t) \end{bmatrix}_{m \times m} \\
 &= [\tilde{X}_{1\text{center}}(t), \tilde{X}_{2\text{center}}(t), \dots, \tilde{X}_{m\text{center}}(t)],
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 X_r(t) = C'_r \Phi(t) &= \begin{bmatrix} c_{\text{radius}}^{11'} & c_{\text{radius}}^{12'} & \cdots & c_{\text{radius}}^{1m'} \\ c_{\text{radius}}^{21'} & c_{\text{radius}}^{22'} & \cdots & c_{\text{radius}}^{2m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\text{radius}}^{n1'} & c_{\text{radius}}^{n2'} & \cdots & c_{\text{radius}}^{nm'} \end{bmatrix}_{n \times m} \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_m(t) \end{bmatrix}_{m \times m} \\
 &= [\tilde{X}_{1\text{radius}}(t), \tilde{X}_{2\text{radius}}(t), \dots, \tilde{X}_{m\text{radius}}(t)].
 \end{aligned} \tag{20}$$

其中第  $j$  个区间中点函数向量和区间半径函数向量分别表示为

$$\tilde{X}_{j\text{center}}(t) = [c_c^{1j'} \phi_j(t), c_c^{2j'} \phi_j(t), \dots, c_c^{nj'} \phi_j(t)]' = [\tilde{x}_{1j}^c(t), \tilde{x}_{2j}^c(t), \dots, \tilde{x}_{nj}^c(t)]', \tag{21}$$

$$\tilde{X}_{j\text{radius}}(t) = [c_r^{1j'} \phi_j(t), c_r^{2j'} \phi_j(t), \dots, c_r^{nj'} \phi_j(t)]' = [\tilde{x}_{1j}^r(t), \tilde{x}_{2j}^r(t), \dots, \tilde{x}_{nj}^r(t)]'. \tag{22}$$

对权重求解过程中, 要保证评价对象的中点函数和半径函数的总离差平方和达到最大, 具体表达式为

$$\sigma_c^2 = \int_T W'_{\text{center}} H_{\text{center}}(t) W_{\text{center}} dt = W'_{\text{center}} \left\{ \int_T \Phi(t)' H_{C\text{center}} \Phi(t) dt \right\} W_{\text{center}} \tag{23}$$

$$= W'_{\text{center}} \left\{ \int_T \Phi(t)' C_{\text{center}} C'_{\text{center}} \Phi(t) dt \right\} W_{\text{center}} = W'_{\text{center}} H_{\text{center}} W_{\text{center}},$$

$$\sigma_r^2 = \int_T W'_{\text{radius}} H_{\text{radius}}(t) W_{\text{radius}} dt = W'_{\text{radius}} \left\{ \int_T \Phi(t)' H_{C\text{radius}} \Phi(t) dt \right\} W_{\text{radius}} \tag{24}$$

$$= W'_{\text{radius}} \left\{ \int_T \Phi(t)' C_{\text{radius}} C'_{\text{radius}} \Phi(t) dt \right\} W_{\text{radius}} = W'_{\text{radius}} H_{\text{radius}} W_{\text{radius}}.$$

为了保证获得的权重都大于零且相加等于1, 对其进行线性约束, 并将最后所得到的权重进行归一化, 具体表现形式为

$$\begin{cases} \max W'_{\text{center}} H_{\text{center}} W_{\text{center}} \\ \text{s.t. } \|W_{\text{center}}\| = 1, \\ W_{\text{center}} > 0, \\ w_j^c(t) = \frac{w_j^c(t)}{\sum_{j=1}^m w_j^c(t)}. \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \max W'_{\text{radius}} H_{\text{radius}} W_{\text{radius}} \\ \text{s.t. } \|W_{\text{radius}}\| = 1, \\ W_{\text{radius}} > 0, \\ w_j^r(t) = \frac{w_j^r(t)}{\sum_{j=1}^m w_j^r(t)}. \end{cases} \tag{26}$$

### 3.4 区间函数型数据的“全局”拉开档次法—中点半径法的一般步骤

#### 第一步 数据预处理

设评价指标函数 $x_{ij}$ 在 $N$ 个观测时点内的取值可表示为 $x_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijl}, \dots, x_{ijN})'$ , 以周为单位对其进行区间化处理, 可得到 $S(S \leq T)$ 个区间数据组成的数据向量 $x_{ij}^* = (x_{ij1}^*, x_{ij2}^*, \dots, x_{ijp}^*, \dots, x_{ijS}^*)'$ , 表示评价指标函数 $x_{ij}(t)$ 通过区间化得到的第 $p$ 个区间数,  $x_{ijp}^l$ 和 $x_{ijp}^u$ 分别表示区间数的下限和上限.

#### 第二步 离散数据函数化

分别将预处理得到的区间数下限及上限离散型数据通过基函数平滑法拟合光滑曲线, 得到第 $i$ 个区间函数的下限函数 $X_{ij}^l(t)$ 和第 $i$ 个区间函数的上限函数 $X_{ij}^u(t)$ , 可用基函数表示为 $x_{ij}^l(t) = \sum_{k=1}^K c_{ijk}^l \phi_k(t)$ ,  $x_{ij}^u(t) = \sum_{k=1}^K c_{ijk}^u \phi_k(t)$ , 其中 $c_{ijk}^l$ 和 $c_{ijk}^u$ 分别表示第 $i$ 个区间数样本下限和样本上限数据拟合函数的第 $k$ 个基函数系数.

#### 第三步 计算中点半径函数, 构建区间函数型数据表

通过给定的区间函数 $X(t) = (x_{ij}^l(t), x_{ij}^u(t))$ , 求得中点函数与半径函数, 具体见式(11)和式(12). 并将其构建为以中点半径值为基础的区间函数型数据表, 具体可见表1, 并分别以 $\tilde{x}_{ij}^c(t)$ 和 $\tilde{x}_{ij}^r(t)$ 表示评价指标函数在时间 $t$ 下的中心函数型数据形式和半径函数型数据形式.

#### 第四步 求对称矩阵

假定有 $n$ 个评价对象 $s_1, s_2, \dots, s_n$ ,  $m$ 个区间指标数据 $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_m$ , 进而将中点函数和半径函数分别组成两个矩阵函数, 并用基函数形式表示, 具体如(19)和(20)所示. 令 $H_{\text{center}}(t) = X_c(t)'X_c(t)$ ,  $H_{\text{radius}}(t) = X_r(t)'X_r(t)$ ,  $X_c(t)$ 和 $X_r(t)$ 是标准化后的中点函数矩阵和半径函数矩阵.

#### 第五步 计算权重

为了确定权重 $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)'$ , 需要在函数型数据表的基础上尽可能大的体现各评价对象之间的整体差异, 因此这里采用中点函数和半径函数的总离差平方和 $\sigma_c^2$ 和 $\sigma_r^2$ 来体现, 具体可见式(23)和(24), 为了保证获得的权重都大于零且相加等于1, 对其进行线性约束, 并将最后所得到的权重进行归一化, 具体见式(25)和(26).

#### 第六步 求得评价函数

在求得权重 $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)'$ 后, 即可得到中点半径形式下的评价函数, 具体可见式(13), 进而得到平均评价价值, 具体可见式(14), 其中中点函数反映整体变化趋势, 而半径函数则反映变化过程中的影响范围趋势.

## §4 实证分析

本节选择义乌中国小商品景气指数数据(<http://zs.ywindex.com>)作实证分析, 从义乌小商品指数中收集了2006.09-2020.12期间15个类别(日用品类, 工艺品类, 电子电器类, 箱包类, 首饰类, 玩具类, 五金及电料类, 钟表眼镜类, 文化办公用品类, 体育娱乐用品类, 鞋类, 针纺织品类, 护肤及美容用品类, 辅料和包装类, 服装服饰类)的市场规模指数, 效益指数和市场信心指数, 其中这三个指标都是经过多级指标汇总之后的结果, 可以综合反映义乌小商品市场繁荣活跃程度, 都为正向指标.

图1中显示的是市场总指数的变化趋势, 其中效益指数的变化波动较大, 规模指数等其他三个指数数据的变化趋势虽然也会有起伏, 但总体来看是平稳的, 景气指数的变化波动与效益指数

相似,且各转折点也相互对应,可以认为景气指数受效益指数的影响较大,其他因素对其影响不大.为了验证这个观点是否正确,下面对数据进行讨论.

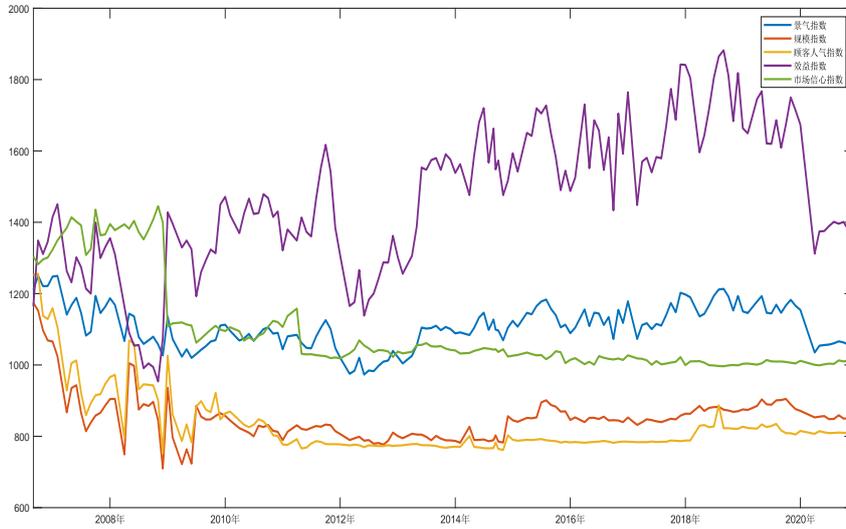


图1 义乌小商品市场总指数

#### 4.1 函数型数据的“全局”拉开档次法

通过计算不同基函数个数和阶数的误差平方和确定拟合函数需要的基函数个数和阶数.由图2可知,当基函数个数为45和阶数为4阶时,误差平方和小且处于转折点,因此选择45个4阶的基函数来拟合函数型数据.

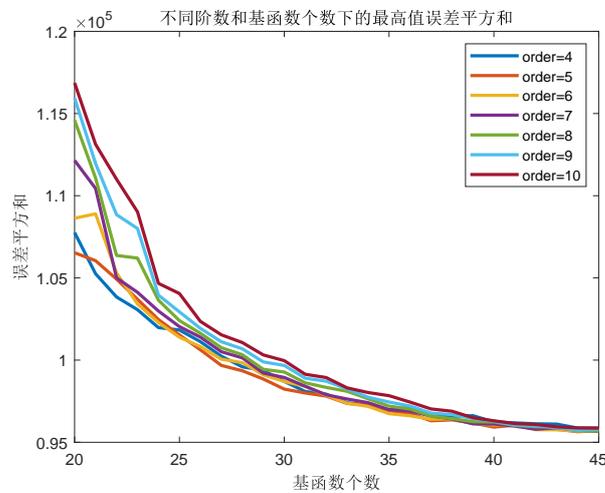


图2 不同基函数个数和阶数的误差平方和

计算对称矩阵

$$H = \begin{pmatrix} 1.0572 & 1.1306 & 0.9315 \\ 1.1306 & 1.3982 & 1.0544 \\ 0.9315 & 1.0544 & 0.9600 \end{pmatrix} \times 10^7,$$

进而求得的权重为  $w = (0.3310, 0.3428, 0.3262)$ , 则评价模型为

$$y_i(t) = 0.3310\tilde{x}_{i1}(t) + 0.3428\tilde{x}_{i2}(t) + 0.3262\tilde{x}_{i3}(t).$$

评价函数选取其中的六个类别进行绘制, 具体如图3所示. 由图3可知, 电子电器类在发展过程中的平均景气程度波动起伏大, 在2020年前总体呈现上升趋势, 而2020年后一直下降. 辅料和包装类的平均景气程度处于最低的位置, 但其变化较为平稳, 另外服装服饰类的平均景气程度从巅峰状态后回落至中间地位, 虽然还是会出现大起伏变化, 但不会变得较差.

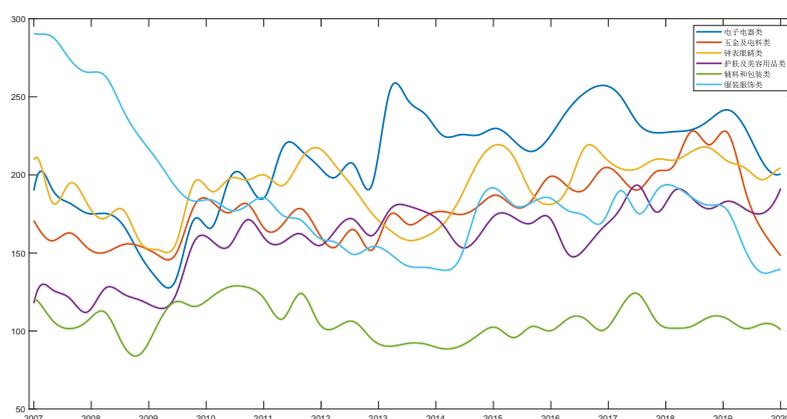


图3 45个4阶基函数下的评价函数

计算各类别  $s_i (i = 1, 2, \dots, 15)$  在时间2006年9月至2020年12月的平均景气程度, 即评价值为: 152.6439, 163.0647, 209.5702, 137.9301, 146.3086, 186.4491, 177.7730, 192.5915, 130.9331, 155.8615, 154.1764, 138.7746, 159.7291, 105.5756, 185.4283. 所以最后的评价结果是  $s_3 > s_8 > s_6 > s_{15} > s_7 > s_2 > s_{13} > s_{10} > s_{11} > s_1 > s_5 > s_{12} > s_4 > s_9 > s_{14}$ . 电子电器类的平均景气值最高, 在所有类别中, 该类别商品的市场活跃程度最高, 发展前景相对最好.

#### 4.2 区间函数型数据的“全局”拉开档次法——中点半径法

根据区间函数型指标数据的拉开档次法计算公式, 求出区间中点函数和区间半径函数的对称矩阵  $H_c$  和  $H_r$  为

$$H_c = \begin{pmatrix} 0.1763 & 0.4276 & 0.1485 \\ 0.4276 & 1.1627 & 0.3699 \\ 0.1485 & 0.3699 & 0.1340 \end{pmatrix} \times 10^7$$

和

$$H_r = \begin{pmatrix} 0.2009 & 0.6357 & 0.0736 \\ 0.6357 & 4.9866 & 0.3280 \\ 0.0736 & 0.3280 & 0.0908 \end{pmatrix} \times 10^7,$$

由此可以计算出的区间中心权重和区间半径权重

$$w_c = (0.7199, 0.9160, 0.6946), \quad w_r = (0.6011, 0.9761, 0.5122),$$

修正后的区间中心权重和区间半径权重为

$$w'_c = (0.3089, 0.3930, 0.2981), \quad w'_r = (0.2875, 0.4671, 0.2454),$$

将权重代入评价模型

$$y_i(t) = [0.3089\tilde{x}_{i1}^c(t) - 0.2877\tilde{x}_{i1}^r(t), 0.3089\tilde{x}_{i1}^c(t) + 0.2877\tilde{x}_{i1}^r(t)] \\ + [0.3931\tilde{x}_{i2}^c(t) - 0.4672\tilde{x}_{i2}^r(t), 0.3931\tilde{x}_{i2}^c(t) + 0.4672\tilde{x}_{i2}^r(t)] \\ + [0.2980\tilde{x}_{i3}^c(t) - 0.2452\tilde{x}_{i3}^r(t), 0.2980\tilde{x}_{i3}^c(t) + 0.2452\tilde{x}_{i3}^r(t)].$$

根据评价模型绘制随时间变化的评价函数, 由图4可知, 根据中点半径法得到的区间评价函数相对最大最小值法得到的更为合理, 弥补了最大最小值法的缺点, 使得区间的两个评价函数不会出现交错的现象, 就不需要分时段进行讨论. 另外对其进行总体趋势的判断, 需要分别对区间的中心函数和半径函数绘制图像.



图4 中点半径下的区间评价函数

由于类别个数较多, 这里同样只选取6个类别商品的评价函数, 观察不同商品在市场活跃程度的情况(以服装服饰类为例). 由图5可知, 区间中点评价函数与前面的区间均值是一样的内容, 因此这里不再对其展开. 由图6可知, 服装服饰类商品在2014年之前的变化较为平稳, 原因可能是当年物价相对较低, 因此该类商品的活跃变化浮动保持在一个较为稳定的范围内, 之后几年服装产业在网络兴起, 也有不同行业的人转行售卖该类商品, 市场活跃变动开始变大, 区间形式的评价函数变动也较为频繁. 在2017年之后服装行业的区间变动范围变小, 但是整体市场景气处于较为稳定的状态, 直至2019年之后两者都一起下降, 发展变差, 后续需要相应的措施改善其发展状态.

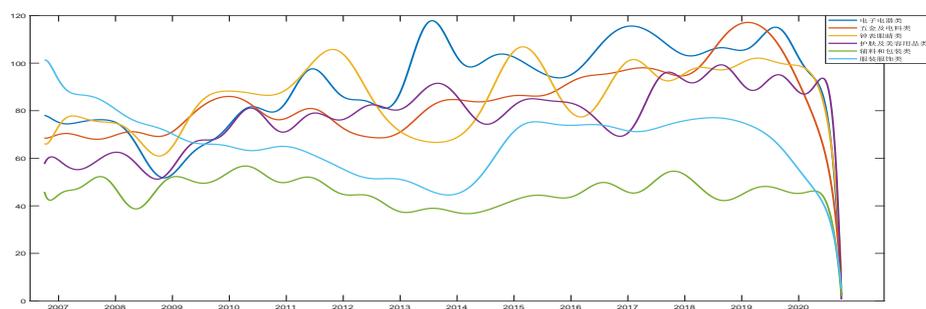


图5 区间中点评价函数

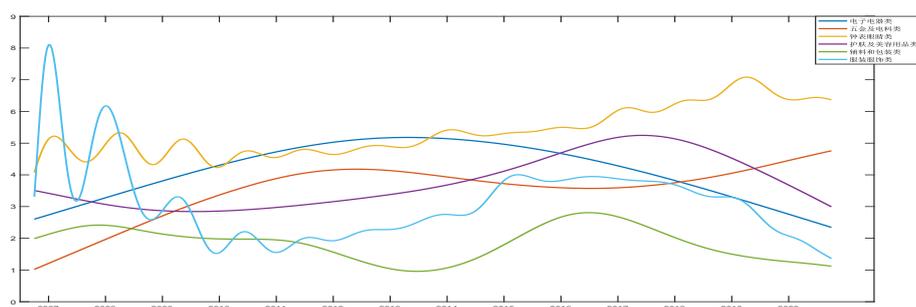


图6 区间半径评价函数

最终综合评价结果为  $s_3 > s_8 > s_7 > s_1 > s_{13} > s_6 > s_{10} > s_{11} > s_4 > s_2 > s_{15} > s_9 > s_{12} > s_5 > s_{14}$ , 从评价结果来看, 中点半径的区间指标函数所得到的结论和最值的区间指标函数的结论相同, 结果受中点指标函数较大, 其原因中点和半径的数据有所差别, 则其得到的评价函数值的大小也有较大的差别. 所得出的结果与区间函数型数据拉开档次法对比两者的评价结果相同, 主要原因在于是对区间中点或者说是均值的比较, 不同点在于区间范围的大小. 中点半径法所得到的评价函数其半径表示的是区间变动范围, 这使得评价结果能有说服力, 且在一个时点的可预测结果相较于区间函数拉开档次法有更多的可能性, 能使其包含更多且合理的信息. 因此中点半径法的区间函数型数据与“全局”拉开档次法的结合更为科学, 合理.

## §5 结论与展望

本文针对现实中出现的区间函数型数据问题, 提出了基于区间函数型数据的综合评价方法. 以义乌中国小商品的15个类别作为研究对象, 对市场规模指数, 效益指数和市场信心指数3个变量进行区间函数型拟合, 并通过函数型数据和区间函数型数据的“全局”拉开档次法对其进行赋权, 得到最终评价结果. 主要成果如下: 1. 对综合评价的指标数据形式进行了拓展, 提出了基于区间函数型指标数据的综合评价一般过程. 通过对指标数据的区间函数化, 构建了区间函数型指标数据的表达形式, 进而给出该形式下的评价模型, 该模型可以使得综合评价过程具有区间动态性, 也使得评价结果具有相对合理性, 科学性. 2. 对拉开档次法的应用范围进行了拓展, 提出

了基于区间函数型数据的拉开档次法. 相较于函数型综合评价, 区间函数型综合评价结果更为合理, 突出了效益指数的重要性, 有利于挖掘更多数据信息特征, 是相对较优的分析方法.

本文提出的分析方法相较于原有方法具有一定优势, 但仍有许多不足有待进一步的研究. 归纳起来, 主要有以下几点: (1) 本文研究区间函数型数据的函数化过程使用的是B样条基拟合函数, 而拟合函数有许多其它基函数可以选择, 如小波基, 多项式基等, 通过比较分析选取合适的基函数系统可以使实验结果更准确; (2) 区间函数型数据是由时间序列数据组成, 可能会存在相位问题. 本文未针对相位问题进行相应的数据调整, 关于相位变动是否对综合评价结果有影响以及影响的大小需要进一步研究. 同时本文在研究中仅选择了一种无量纲化方法, 且选择了先无量纲化后函数化的策略, 尚未对上述方法对综合评价结果的影响进行研究; (3) 本文构建了一种区间函数型数据, 以中点函数和半径函数来构造区间函数, 并假定区间数据都服从均匀分布, 而实际中的区间数据也可能会服从其他分布, 如正态分布, 因此基于分布的区间函数型“全局”拉开档次法也是未来一个值得研究的方向. 限于篇幅, 本文没有涉及讨论对于以最大值函数和最小值函数表示区间函数的上下限来构造区间函数数据的常规构权方法.

#### 参考文献:

- [1] 李美娟, 潘瑜昕, 徐林明, 等. 改进区间数动态TOPSIS评价方法[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(7): 1891-1904.
- [2] 李美娟, 高婧颖, 陈莞. 基于归一化双向投影法的动态评价方法[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(10): 2730-2742.
- [3] 孙利荣, 朱丽君, 徐莉妮, 等. 基于时变距离函数的多变量区间函数型主成分分析方法[J]. 高校应用数学学报, 2021, 36(2): 148-160.
- [4] 白永昕, 田茂再. Poisson分布下基于鞍点逼近的慢性病风险差的置信区间构造[J]. 高校应用数学学报, 2017, 32(3): 253-266.
- [5] 孙利荣, 卓炜杰, 王凯利, 等. 函数型聚类分析方法研究[J]. 高校应用数学学报, 2020, 35(2): 127-140.
- [6] 苑莹, 张同辉, 庄新田. 中国股市多分形波动率建模及预测研究[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(9): 2269-2281.
- [7] 俞高锋, 李登峰. 网络安全威胁态势评级的变权方法[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(9): 2477-2491.
- [8] 林萍萍, 李登峰, 江彬倩, 等. 属性关联的双极容度多属性决策VIKOR方法[J]. 系统工程理论与实践, 2021, 41(8): 2147-2156.
- [9] 陈衍泰, 陈国宏, 李美娟. 综合评价方法分类及研究进展[J]. 管理科学学报, 2004, 7(2): 69-79.
- [10] 虞晓芬, 傅玳. 多指标综合评价方法综述[J]. 统计与决策, 2004, 11: 119-121.
- [11] 郭亚军, 姚远, 易平涛. 一种动态综合评价方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(10): 154-158.
- [12] 陈骥. 基于区间数的综合评价问题研究[D]. 杭州: 浙江工商大学, 2010.
- [13] 刘成斌, 罗党, 党耀国, 等. 区间直觉模糊动态规划方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(1): 8-13.
- [14] Ramsay J O, Silverman B W. Function Data Analysis[M]. 2nd Ed. New York: Springer, 2005.
- [15] Ramsay J O, Dalzell C J. Some tools for functional data analysis[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1991, 53: 539-572.

- [16] 严明义. 生活质量的综合评价: 基于数据函数性特征的方法[J]. 统计与信息论坛, 2007, 22(2): 13-17.
- [17] 孙利荣. 基于函数数据的综合评价方法研究[D]. 杭州: 浙江工商大学, 2012.
- [18] 苏为华, 孙利荣, 崔峰. 一种基于函数型数据的综合评价方法研究[J]. 统计研究, 2013, 30(2): 88-94.
- [19] 魏艳华, 王丙参. 基于多产业生产总值的甘肃省经济评价与分区[J]. 宁夏师范学院学报, 2020, 41(7): 80-90.
- [20] 吕鹏, 王晓玲, 余红玲, 等. 基于FDA的大坝渗流安全动态可拓评价模型[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2020, 48(5): 433-439.
- [21] 张宝学, 陈庆美, 王丙参, 等. 基于函数型数据的长江经济带生态建设动态综合评价[J]. 技术经济, 2020, 39(6): 131-140.
- [22] Shimizu N. Dissimilarity criteria in hierarchical clustering for interval-valued functional data[J]. International Journal of Knowledge Engineering and Soft Data Paradigms, 2011, 3(2): 132-142.
- [23] Nasirzadeh R, Nasirzadeh F, Mohammadi Z. Linear regression analysis for interval-valued functional data[J]. Stat, 2021, 10(1): 1-10.
- [24] Nasirzadeh R, Nasirzadeh F, Mohammadi Z. Some non-parametric regression models for interval-valued functional data[J]. Stat, 2022, 11(1): e443.
- [25] Beyaztas U, Shang H L, Abdel-Salam A S G. Functional linear models for interval-valued data[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2022, 51(7): 3513-3532.
- [26] 王桂明. 函数数据的多元统计分析及其在证券投资分析中的应用[D]. 厦门: 厦门大学, 2010.
- [27] 郭亚军. 一种新的动态综合评价方法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 49-54.
- [28] 孙爱民. 基于熵权法的区间数多指标决策方法及应用[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(7): 171-179.

### Study on interval functional data weighting methods

SUN Li-Rong<sup>1</sup>, ZHENG Chi<sup>1</sup>, MAO Hao-Feng<sup>1</sup>, SONG Xiu-Ying<sup>2</sup>

(1. School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China;

2. Hangzhou College of Commerce, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Aiming at the problems of information loss or excessive computational complexity of functional comprehensive evaluation caused by excessive data, this paper proposes a comprehensive evaluation method based on interval functional data, and proposes a new “global” pull-out grade method to determine the weight coefficient for the particularity of the comprehensive evaluation problem supported by the interval functional data table. Finally, taking Yiwu Commodity Prosperity Index as an example, the “global” pull-out grade method in the form of functional data and interval functional data is used to empower it, and then the evaluation research is carried out.

**Keywords:** comprehensive evaluation; functional data; interval functional data; weights making; “global” scale method

**MR Subject Classification:** 62H30