高校应用数学学报
2024, 39(1): 64-72

# 求解Hankel张量方程的修正自适应LM算法

马昌凤[1], 李清雅[2]

(1. 福州外语外贸学院 大数据学院&数据科学与智能计算重点实验室, 福建福州 352002;
2. 福建师范大学 数学与统计学院, 福建福州 350117)

**摘　要**: 结合经典的LM算法及其变形, 提出了求解Hankel张量方程的修正自适应LM算法, 并证明其全局收敛性和局部二次收敛性. 数值实验验证了所提算法的可行性和有效性.

**关键词**: Hankel张量方程; 修正自适应LM算法; 收敛性分析; 数值实验
**中图分类号**: O241.7
**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)01-0064-09

## §1　引　言

本文考虑张量方程

$$\mathcal{H}x^{m-1} = b \tag{1}$$

的数值求解方法, 此处$\mathcal{H}$表示$m$阶$n$维的Hankel张量, $x \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}^n$.

Hankel张量作为一类具有特殊结构的张量，在信号处理和数据拟合中有着重要的有用. 一个$m$阶张量$\mathcal{H} \in \mathbf{C}^{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m}$称为Hankel张量如果

$$\mathcal{H}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \phi\left(i_1 + i_2 + \cdots + i_m\right),$$

对$i_k = 0, 1, \ldots, n_k - 1\,(k = 1, 2, \ldots, m)$. 当$n_1 = n_2 = \cdots n_m$时, 称$\mathcal{H}$为方形Hankel张量. 注意到Hankel张量的自由度为$d_{\mathcal{H}} := n_1 + n_2 + \cdots + n_m - m + 1$. 因此由

$$h_k = \phi\left(k\right), k = 0, 1, 2, \ldots, d_{\mathcal{H}} - 1,$$

定义一个长度为$d_{\mathcal{H}}$的向量$h$称为$\mathcal{H}$ 的生成向量, 当张量大小固定时, 可以完全确定这个Hankel张量$\mathcal{H}$.

Hankel张量一词最早由Luque和Thibon[1]提出, 且Badeau和Boyer[2]提出了两种将Hankel结构扩展到四阶张量的方法, 并推导出一种快速算法来计算它们的高阶奇异值分解(HOSVD). 基于Hankel张量的性质, Qi[3]主要通过生成函数研究了Hankel张量的谱性质. Ding和Qi等人[4]给出了每个强-Hankel张量的平方和分解. 随后, Nie等人[5]证明了对于低秩对称张量, 存在一个基数变化, 使其成为Hankel张量. Hou等人[6]还根据Hankel张量的特殊结构特点, 通过快速Fourier变换精简了Hankel张量向量积的计算过程, 并讨论了其收敛速度.

收稿日期: 2022-11-18　　修回日期: 2023-04-07
基金项目: 国家自然科学基金(12371378); 福建省自然科学基金(2023J011127)

最近, Lv和Ma[7]给出了求解半对称张量方程的LM算法, 并给出其二次收敛性证明过程. Liang等人[8]依据这一结论提出了系数张量为"TT"形式的张量方程的两步加速的LM方法(TALM), 并证明其三次收敛性. 受此文LM参数选取的启发, 本文提出了求解Hankel张量方程的一个新的修正自适应LM算法.

## §2 修正自适应LM算法

本节提出基于快速Fourier算法的求解Hankel张量方程(1)的一个修正自适应LM算法. 设

$$F\left(x\right)=\mathcal{H}x^{m-1}-b \tag{2}$$

和

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left\|F\left(x\right)\right\|^{2}=\frac{1}{2}\left\|\mathcal{H}x^{m-1}-b\right\|^{2}, \tag{3}$$

如果张量方程(1)有解, 则对任意$m>2$, 方程(1)等价于下列优化问题

$$\min_{x\in\mathbf{R}^{n}}f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left\|\mathcal{H}x^{m-1}-b\right\|^{2}, \tag{4}$$

且其极小值为0.

根据Hankel张量的结构, 则$\mathcal{H}x^{m}$和$\mathcal{H}x^{m-1}$ 满足

$$\left(\mathcal{H}x^{m}\right)'=m\mathcal{H}x^{m-1},\left(\mathcal{H}x^{m-1}\right)'=\left(m-1\right)\mathcal{H}x^{m-2}.$$

令

$$J\left(x\right)=F'\left(x\right)=\left(m-1\right)\mathcal{H}x^{m-2}, \tag{5}$$

则有

$$g\left(x\right)=\nabla f\left(x\right)=J\left(x\right)^{\mathrm{T}}F\left(x\right). \tag{6}$$

此外针对Hankel张量$\mathcal{H}\in T_{m,n}$, 给出以下标记$\mathcal{H}_{i_1}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})_1\leqslant i_2\cdots i_m$.

下面给出本文的修正自适应LM算法的具体步骤.

**算法2.1** (修正自适应LM算法)

步0 输入Hankel 张量$\mathcal{H}\in T_{m,n}$的生成向量$u\in\mathbf{R}^{m(n-1)+1}$, 初始向量$x_0\in\mathbf{R}^n, b\in\mathbf{R}^n, \varepsilon=10^{-6}, \sigma=0.2, \beta=0.35, \mu=0.6, \delta\in[1,2]$. 置$k=0$.

步1 按式(2), (5)和(6)计算$F_k:=F(x_k), J_k:=J(x_k)$和$g_k:=g(x_k)$. 取

$$\tau_k=\frac{\mu\left\|F_k\right\|^{\delta}}{1+\left\|F_k\right\|^{\delta}}.$$

步2 若$\left\|J_k^{\mathrm{T}}F_k\right\|\leq\varepsilon$, 则终止, 并输出$x_k$; 否则解方程

$$(J_k^{\mathrm{T}}J_k+\tau_kI)d_k=-J_k^{\mathrm{T}}F_k, \tag{7}$$

求出$d_k$.

步3 如果$d_k$满足

$$\left\|F(x_k+d_k)\right\|\leq\rho\left\|F_k\right\|, \tag{8}$$

则令$x_{k+1}=x_k+d_k$, 转步5. 否则, 转步4.

步4 令$l_k$为满足下式的最小非负整数$l$, 使得$\alpha_k=\beta^{l_k}$满足

$$f\left(x_k+\alpha_kd_k\right)\leq f\left(x_k\right)+\sigma\alpha_kg_k^{\mathrm{T}}d_k.$$

令$x_{k+1}=x_k+\alpha_kd_k$.

步5 置$k:=k+1$, 转步1.

下面给出算法的全局收敛性定理.

**定理2.1** 如果张量$\mathcal{H}$是实半对称的. $x^*$是由算法2.1产生的迭代序列$\{x_k\}$的聚点, 那么有

$$g(x^*) = J(x^*)^{\mathrm{T}} F(x^*) = 0.$$

**证** 反证法. 若存在迭代序列$\{x_k\}$的一个收敛子列$\{x_{k_j}\}$, 且收敛到$x^*$, 满足

$$\lim_{\tau_{k_j}\to\tau^*} J(x_{k_j})^{\mathrm{T}} J(x_{k_j}) = J(x^*)^{\mathrm{T}} J(x^*).$$

而

$$J(x^*)^{\mathrm{T}} J(x^*) + \tau^* I = (m-1)^2 \big(\mathcal{H}(x^*)^{m-2}\big)^{\mathrm{T}} \big(\mathcal{H}(x^*)^{m-2}\big) + \tau^* I,$$

则$J(x^*)^{\mathrm{T}} J(x^*) + \tau^* I$是正定矩阵. 如果$g(x^*) \neq 0$, 那么

$$\lim_{x_{k_j}\to x^*} d_{k_j} = d^* = -\big(J(x^*)^{\mathrm{T}} J(x^*) + \tau^* I\big)^{-1} J(x^*)^{\mathrm{T}} F(x^*),$$

其中$d^*$是$x^*$的下降方向, 则

$$g(x^*)^{\mathrm{T}} d^* = -g(x^*)^{\mathrm{T}} \big(J(x^*)^{\mathrm{T}} J(x^*) + \tau^* I\big)^{-1} g(x^*) < 0. \tag{9}$$

结合算法2.1可得$f(x^*+\beta^{l^*} d^*) \leq f(x^*) + \sigma\beta^{l^*} g(x^*)^{\mathrm{T}} d^*$. 从而根据函数$f(x)$的连续性有

$$f(x_{k_j} + \beta^{l^*} d_{k_j}) \leq f(x_{k_j}) + \sigma\beta^{l^*} g(x_{k_j})^{\mathrm{T}} d_{k_j}, x_{k_j} \to x^*, j \to +\infty.$$

根据Armijo准则, 且$l^* > l_{k_j}$, 那么

$$f\left(x_{k_j+1}\right) = f\big(x_{k_j} + \beta^{l_{k_j}} d_{k_j}\big) \leq f(x_{k_j}) + \sigma\beta^{l_{k_j}} g(x_{k_j})^{\mathrm{T}} d_{k_j} \leq f(x_{k_j}) + \sigma\beta^{l^*} g(x_{k_j})^{\mathrm{T}} d_{k_j},$$

则

$$f(x_{k_j+1}) \leq f(x_{k_j}) + \sigma\beta^{l^*} g(x_{k_j})^{\mathrm{T}} d_{k_j}, j \to +\infty. \tag{10}$$

两边同时取极限可得$f(x^*) \leq f(x^*) + \sigma\beta^{l^*} g(x^*)^{\mathrm{T}} d^*$, 因此$g^{\mathrm{T}}(x^*)\, d^* > 0$, 与式(9)矛盾.

下面考虑算法的局部二阶收敛性. 首先给出局部误差界的定义及一些基本假设条件.

**定义2.1** 取$\mathcal{N} \subseteq \mathbf{R}^n$, $\mathcal{N} \cap X^* \neq \varnothing$, 这里$X^*$表示式(4)的解集. 如果$\exists$常数$\eta > 0$满足

$$\|F(x)\| \geq \eta\, \mathrm{dist}(x, X^*), \quad \forall x \in \mathcal{N},$$

这里$\mathrm{dist}(x, X^*) = \inf\limits_{y\in X^*} \|y - x\|$, 那么就称$F(x)$在$\mathcal{N}$上具有局部误差界.

**假设2.1** 假设$x^* \in X^*$, $\exists$常数$\eta_1 > 0$满足

$$\|F(x)\| \geq \eta_1\, \mathrm{dist}(x, X^*),$$

其中, $\forall x \in \mathcal{N}(x^*, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^*\| \leq r\}$, $0 < r < 1$, 那么就称$F(x)$在$\mathcal{N}(x^*, r)$ 上具有局部误差界. 令$\hat{x}_k \in X^*$, 使得

$$\|\hat{x}_k - x_k\| = \mathrm{dist}(x_k, X^*) = \inf_{x\in X^*} \|x - x_k\|. \tag{11}$$

**引理2.1** 如果Hankel 张量$\mathcal{H} \in T_{m,n}$, 有界闭集$\Phi \subseteq \mathbf{R}^n$, 那么$\mathcal{H}x^m$在集合$\Phi$上是Lipschitz连续的.

**证** 构造函数$T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, T(x) = \mathcal{H}x^m$. $\Phi \subseteq \mathbf{R}^n$为有界闭集, $\forall x \in \Phi$, $\exists \epsilon > 0$使得$\|x\| < \epsilon$. 若$m = 1$, 则$\mathcal{H}$是$n$维向量, $T(x) = \mathcal{H}x = \sum\limits_{i=1}^n h_i x_i$. $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$, 则有

$$\begin{aligned}|T(u) - T(v)| &= \left|\sum_{i=1}^n h_i u_i - \sum_{i=1}^n h_i v_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n h_i (u_i - v_i)\right| \leq \sum_{i=1}^n |h_i||u_i - v_i| \\ &\leq \max_{i=1,2,\cdots,n} |h_i| \left(\sum_{i=1}^n |u_i - v_i|\right) \leq \max_{i=1,2,\cdots,n} |h_i|\, \|u - v\|_1 \leq \varphi_1 \|u - v\|.\end{aligned}$$

假设$\forall m \le k-1$均有$T(x)$是Lipschtz连续的. 那么当$m=k$时, 则有$T(x)=\mathcal{H}x^k$, 故

$$\begin{aligned}
|T(u)-T(v)| &= \left|\mathcal{H}u^k-\mathcal{H}v^k\right| \\
&= \left|\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k=1}^{n} h_{i_1\cdots i_k}u_{i_1}\cdots u_{i_k} - \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k=1}^{n} h_{i_1\cdots i_k}v_{i_1}\cdots v_{i_k}\right| \\
&= \left|\sum_{i_1=1}^{n}\left(u_{i_1}\mathcal{H}_{i_1}u^{k-1}-v_{i_1}\mathcal{H}_{i_1}v^{k-1}\right)\right| \\
&\le \sum_{i_1=1}^{n}\left[|u_{i_1}-v_{i_1}|\left|\mathcal{H}_{i_1}u^{k-1}\right|+|v_{i_1}|\,\|u-v\|\right] \\
&\le \left(\max_{i_1=1,2,\cdots,n}\left|\mathcal{H}_{i_1}u^{k-1}\right|+\sum_{i_1=1}^{n}|v_{i_1}|\right)\|u-v\| \\
&= \varphi_2\|u-v\|.
\end{aligned}$$

因为$\left|\mathcal{H}_{i_1}u^{k-1}\right|$在集合$\Phi$ 上有界, 因此上式成立. 显然$\varphi_2$是由Hankel张量$\mathcal{H}$和有界闭集$\Phi$决定的. 从而$\forall m$与向量$u,v\in\Phi\subseteq\mathbf{R}^n$满足$|T(u)-T(v)|=|\mathcal{H}u^m-\mathcal{H}v^m|<\varphi_2\|u-v\|$. 因此$\mathcal{H}x^m$在$\Phi$上是Lipschitz连续的.

**推论2.1** 如果Hankel张量$\mathcal{H}\in T_{m,n}$, 有界闭集$\Phi\subseteq\mathbf{R}^n$, 那么$\mathcal{H}x^{m-1}$与$\mathcal{H}x^{m-2}$在$\Phi$上是Lipschitz连续的.

**证** 对任意向量$u,v\in\mathbf{R}^n$, 满足

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{H}u^{m-1}-\mathcal{H}v^{m-1}\right\| &\le C_1\left\|\left(\mathcal{H}_{i_1}u^{m-1}-\mathcal{H}_{i_1}v^{m-1}\right)_{1\le i_1\le n}\right\|_\infty \\
&= C_1\max_{1\le i_1\le n}\left|\mathcal{H}_{i_1}u^{m-1}-\mathcal{H}_{i_1}v^{m-1}\right| \le C_1\max_{1\le i_1\le n}\varphi_{i_1}\|u-v\| = \varphi_3\|u-v\|
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{H}u^{m-2}-\mathcal{H}v^{m-2}\right\| &\le C_2\left\|\left(\mathcal{H}_{i_1i_2}u^{m-2}-\mathcal{H}_{i_1i_2}v^{m-2}\right)_{1\le i_1,i_2\le n}\right\|_\infty \\
&= C_2\max_{1\le i_1\le n}\sum_{i_2=1}^{n}\left|\mathcal{H}_{i_1i_2}u^{m-2}-\mathcal{H}_{i_1i_2}v^{m-2}\right| \\
&\le C_2\max_{1\le i_1\le n}\sum_{i_2=1}^{n}\varphi_{i_1i_2}\|u-v\| = \varphi_4\|u-v\|,
\end{aligned}$$

这里$\left(\mathcal{H}_{i_1}u^{m-1}-\mathcal{H}_{i_1}v^{m-1}\right)_{1\le i_1\le n}$是$n$维向量, $\left(\mathcal{H}_{i_1i_2}u^{m-2}-\mathcal{H}_{i_1i_2}v^{m-2}\right)_{1\le i_1,i_2\le n}$是$n$阶矩阵. 显然, $\varphi_3$和$\varphi_4$是由Hankel张量$\mathcal{H}$和有界闭集$\Phi$决定的. 从而$\mathcal{H}x^{m-1}$与$\mathcal{H}x^{m-2}$在$\Phi$上是Lipschitz连续的.

进一步不难得到如下结论.

**引理2.2** 如果Hankel张量$\mathcal{H}\in T_{m,n}$, 则

(a) $F(x)$具有任意阶导数.

(b) $F(x)$和$J(x)$在$\mathcal{N}(x^*,r)$上是Lipschitz 连续的, 即存在常数$L_1,L_2>0$, 使对任意向量$u,v\in\mathcal{N}(x^*,r)$, 满足

$$\|F(u)-F(v)\|<L_1\|u-v\| \tag{12}$$

及

$$\|J(u)-J(v)\|<L_2\|u-v\|. \tag{13}$$

**引理2.3**[7] 如果函数$F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$在凸集$D_0\subseteq D$上是连续可微的, 且$F'(\cdot)$满足

$$\|F'(u)-F'(v)\|\le\zeta\|u-v\|^{\theta},\quad \forall u,v\in D_0,$$

这里$\zeta\ge 0,\theta\ge 0$是常数, 那么对任取向量$u,v\in D_0$, 满足

$$\|F(u)-F(v)-F'(v)(u-v)\|\le\frac{\zeta}{1+\theta}\|u-v\|^{1+\theta}.$$

根据引理2.2和引理2.3可得

$$\|F(u)-F(v)-J(v)(u-v)\|<L\|u-v\|^2,\quad \forall u,v\in\mathcal{N}\left(x^*,r\right). \tag{14}$$

**引理2.4** 在假设2.1成立的条件下, 如果$x_k\in\mathcal{N}\big(x^*,\dfrac{r}{2}\big)$, 那么$\exists$常数$\eta_2>0$, 使得

$$\|d_k\|\le\eta_2\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|=\eta_2\operatorname{dist}\left(x_k,X^*\right). \tag{15}$$

**证** 根据$x_k\in\mathcal{N}\big(x^*,\dfrac{r}{2}\big)$和式(11)有

$$\|\hat{x}_k-x^*\|\le\|\hat{x}_k-x_k\|+\|x_k-x^*\|\le 2\left\|x_k-x^*\right\|\le r,$$

故$\hat{x}_k\in\mathcal{N}\left(x^*,r\right)$.

由假设2.1和式(12)有

$$\eta_1^2\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|^2\le\tau_k\le\left\|F\left(x_k\right)\right\|\le L\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|, \tag{16}$$

设

$$\varPhi_k(d)=\left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)d\right\|^2+\tau_k\|d\|^2, \tag{17}$$

由式(7)可得$d_k=-\Big(J\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}J\left(x_k\right)+\tau_kI\Big)^{-1}J\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}F\left(x_k\right)$是$\varPhi_k(d)$的稳定点. 因此$d_k$为$\varPhi_k(d)$的极小点. 结合式(14), 式(16)和式(17)可得

$$\begin{aligned}
\|d_k\|^2 &\le \frac{\left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)d_k\right\|^2+\tau_k\left\|d_k\right\|^2}{\tau_k}=\frac{\varPhi_k\left(d_k\right)}{\tau_k}\le\frac{\varPhi_k\left(\hat{x}_k-x_k\right)}{\tau_k}\\
&= \frac{\left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)\left(\hat{x}_k-x_k\right)\right\|^2+\tau_k\left\|\hat{x}_k-x_k\right\|^2}{\tau_k}\\
&\le \frac{L^2\left\|\hat{x}_k-x_k\right\|^4}{\eta_1^2\left\|\hat{x}_k-x_k\right\|^2}+\left\|\hat{x}_k-x_k\right\|^2=\left(\eta_1^{-2}L^2+1\right)\left\|\hat{x}_k-x_k\right\|^2.
\end{aligned}$$

故有$\|d_k\|\le\sqrt{\eta_1^{-2}L^2+1}\left\|\hat{x}_k-x_k\right\|=\eta_2\operatorname{dist}\left(x_k,X^*\right)$.

**引理2.5** 在假设2.1成立的条件下, 如果$x_k\in\mathcal{N}\big(x^*,\dfrac{r}{2}\big)$, 那么$\exists$常数$\eta_3>0$, 使得

$$\left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)d_k\right\|\le\eta_3\operatorname{dist}\left(x_k,X^*\right)^2.$$

**证** 由于$\varPhi_k(d)$为凸函数, 且

$$d_k=-\big(J\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}J\left(x_k\right)+\tau_kI\big)^{-1}J\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}F\left(x_k\right)$$

为$\varPhi_k(d)$的极小点, 那么

$$\begin{aligned}
\left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)d_k\right\|^2 &\le \varPhi_k\left(d_k\right)\le\varPhi_k\left(x_k-\hat{x}_k\right)\\
&\le \left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)\left(x_k-\hat{x}_k\right)\right\|^2+\tau_k\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|^2\\
&\le L^2\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|^4+\tau_k\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|^2\\
&\le 2L^2\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|^4,
\end{aligned}$$

故$\left\|F\left(x_k\right)+J\left(x_k\right)d_k\right\|\le\sqrt{2}L\left\|x_k-\hat{x}_k\right\|^2\equiv\eta_3\operatorname{dist}\left(x_k,X^*\right)^2$.

**引理2.6** 在假设2.1成立的条件下, 如果$x_k,x_{k+1}\in\mathcal{N}\big(x^*,\dfrac{r}{2}\big)$, 那么$\exists$常数$\eta_4>0$, 使得

$$\operatorname{dist}(x_{k+1},X^*)\le\eta_4\operatorname{dist}(x_k,X^*)^2.$$

**证** 根据假设2.1可得

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_{k+1},X^*) &\le \frac{1}{\eta_1}\|F(x_{k+1})\|\\ &\le \frac{1}{\eta_1}\left(\|F(x_k)+J(x_k)d_k\|+\|F(x_{k+1})-F(x_k)-J(x_k)d_k\|\right)\\ &\le \frac{L+\eta_3}{\eta_1}\|x_k-\hat{x}_k\|^2=\eta_1^{-1}(L+\eta_3)\operatorname{dist}(x_k,X^*)^2.\end{aligned}$$

故有$\operatorname{dist}(x_{k+1},X^*)\le\eta_1^{-1}(L+\eta_3)\|x_k-\hat{x}_k\|^2=\eta_4\operatorname{dist}(x_k,X^*)^2$.

下面证明所提出的修正自适应LM算法的二次收敛性.

**定理2.2** 在假设2.1成立的条件下, 算法2.1产生的迭代序列$\{x_k\}$二阶收致于方程(3)的某个解.

**证** 结合引理2.5, 引理2.6和$\operatorname{dist}(x_k,X^*)$的定义可得

$$\|\hat{x}_k-x_k\|\le\|\hat{x}_{k+1}-x_k\|\le\|\hat{x}_{k+1}-x_{k+1}\|+\|d_k\|\le\eta_4\operatorname{dist}(x_k,X^*)^2+\|d_k\|.$$

则对足够大的$k$, 满足$\|x_k-\hat{x}_k\|=\operatorname{dist}(x_k,X^*)\le 2\|d_k\|\le O(\|x_k-\hat{x}_k\|)$, 且有

$$\|d_{k+1}\|\le\eta_2\operatorname{dist}(x_{k+1},X^*)\le\eta_2\eta_4\operatorname{dist}(x_k,X^*)^2\le 4\eta_2\eta_4\|d_k\|^2\le O\big(\|d_k\|^2\big).$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|^2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\|d_{k+1}\|}{\|d_k\|^2}=O(1).$$

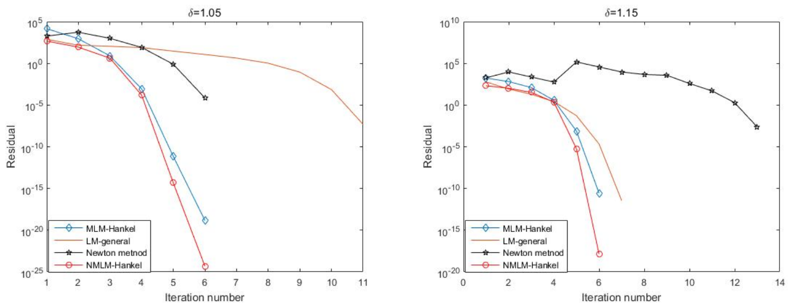


图 1 例3.1中$\delta=1.05,1.15$时的收敛效果

# §3 数值实验

本节通过数值实验验证算法的有效性. 所有的实验均在装有MATLAB R2020的个人PC机上执行, 使用Tensor Toolbox Version 2.6来计算张量-向量积. 终止准则为

$$\|g(x_k)\|=\|J(x_k)^{\mathrm{T}}F(x_k)\|\le 10^{-6},$$

或迭代次数超过1000次而未达到精度要求.

下面的两个算例取自文献[9], 将本文所提出的算法(称为MNLM-Hankel)与其他三种算法(NLM-Hankel, Newton method和LM-general)进行比较, 以说明本文算法的有效性.

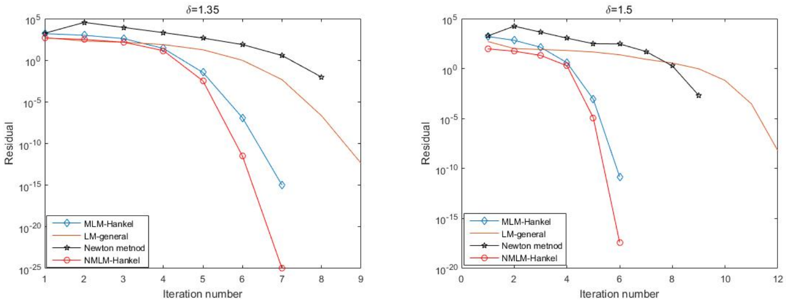


图 2 例3.1中$\delta = 1.35, 1.50$时的收敛效果

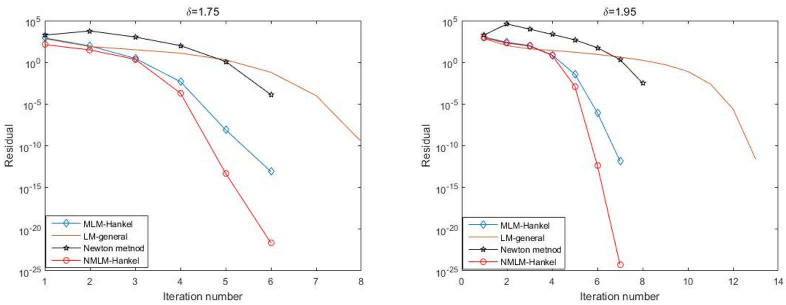


图 3 例3.1中$\delta = 1.75, 1.95$时的收敛效果

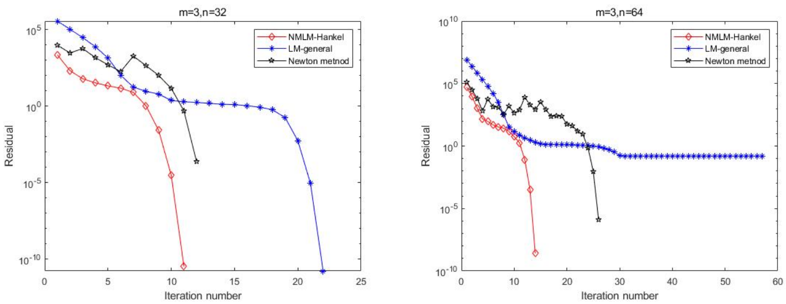


图 4 例3.2中$m = 3, n = 32$和$m = 3, n = 64$时的收敛效果

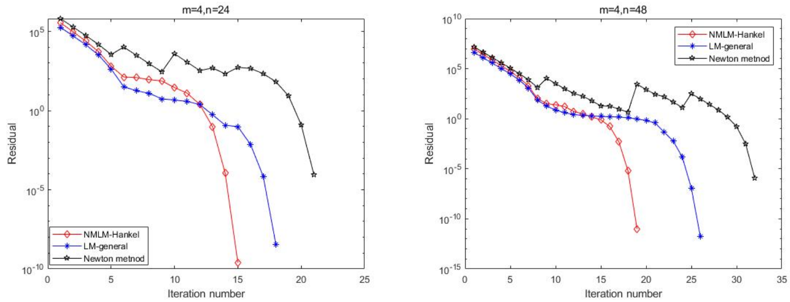


图 5 例3.2中$m=4,n=24$和$m=4,n=48$时的收敛效果

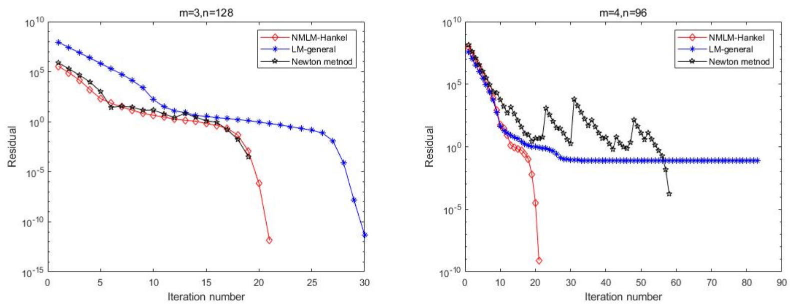


图 6 例3.2中$m=3,n=128$和$m=4,n=96$时的收敛效果

**例3.1** 考虑Hankel张量$\mathcal{H}\in T_{3,3}$

$$\mathcal{H}_{i,j,k}=\begin{cases}1, & \text{若} i+j+k=7,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

算法中生成向量$u=(0,0,0,0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 初始向量$x_0=10*\mathrm{rand}(3,1), b=1000{*}\mathrm{ones}(3,1)$. 对于不同的$\delta$值, 数值结果如图1-3所示.

**例3.2** 考虑$m$阶$n$维Hankel张量

$$\mathcal{H}_{i_1,i_2,\cdots,i_m}=\begin{cases}1, & \text{若} i_1+\cdots+i_m=m+1\text{或}3m,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$u\in\mathbf{R}^{2m+1}$满足

$$u_i=\begin{cases}1, & \text{若} i=1\text{或}2m,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

实验中选取初始向量为$x_0=6*\mathrm{rand}(n,1)$, 右端项$b=1000{*}\mathrm{ones}(n,1)$. 选取$\delta=1.35$, 对于不同的$m$, $n$值, 数值结果如图4-6所示.

## 参考文献:


[1] Xie Zejia, Jin Xiaoqing, Wei Yimin. Tensor methods for solving symmetric $\mathcal{M}$-tensor systems[J]. J Sci Comput, 2018, 74(1): 412-425.

[2] Luque J G, Thibon J Y. Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals[J]. J Physics A, 2003, 36(19): 52-67.

[3] Qi Liqun. Hankel tensors: Associated Hankel matrices and Vandermonde decomposition[Z]. arXiv preprint arXiv:1310.5470, 2013.

[4] Ding Weiyang, Qi Liqun, Wei Yimin. Inheritance properties and sum-of-squares decomposition of Hankel tensors: theory and algorithms[J]. BIT Numer Math, 2017, 57(1): 169-190.

[5] Nie Jiawang, Ye Ke. Hankel tensor decompositions and ranks[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2019, 40(2): 486-516.

[6] 侯哲, 唐嘉, 马昌凤. 一种基于快速傅里叶变换的求解Hankel张量特征值的方法[J]. 邵阳学院学报(自然科学版), 2019, 16(4): 14-22.

[7] Lv Changqing, Ma Changfeng. A Levenberg–Marquardt method for solving semi-symmetric tensor equations[J]. J Comput Appl Maths, 2018, 332: 13-25.

[8] Liang Maolin, Zheng Bing, Zheng Yutao, et al. A two-step accelerated Levenberg-Marquardt method for solving multilinear systems in tensor-train format[J]. J Comput Appl Math, 2021, 382: 113069.

[9] Nie Jiawang, Wang Li. Semidefinite relaxations for best rank-1 tensor approximations[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2014, 35(3): 1155-1179.


# The modified adaptive LM algorithm for solving Hankel tensor equation


MA Chang-feng[1], LI Qing-ya[2]

(1. School of Big Data & Key Laboratory of Digital Technology and Intelligent Computing, Fuzhou University of International Studies and Trade, Fuzhou 350202, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)



**Abstract**: In this paper, combined with classic LM method and its variant, a modified adaptive LM algorithm is proposed for solving Hankel tensor equation. It is proved that this method has global convergent and local quadratic convergence. Numerical experiments show that the method is feasible and effective.



**Keywords**: Hankel tensor equation; modified adaptive LM algorithm; convergence analysis; numerical experiment

**MR Subject Classification**: 65H10; 15A69