高校应用数学学报
2024, 39(1): 114-120

λ_3-最优连通混合Cayley图

陈来焕[1*], 孟吉翔[2], 刘凤霞[2]
(1. 河南财经政法大学 数学与信息科学学院, 河南郑州 450003;
2. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆乌鲁木齐 830046)

摘　要: 对于连通图$X=(V,E)$, 如果$X-F$不连通并且$X-F$的每个分支至少含k个点, 那么边集$F\subseteq E$是一个k-限制性边割. 图X的k-限制性边连通度$\lambda_k(X)$为X的最小k-限制性边割的基数. 该文给出了混合Cayley图的3-限制性边连通度和λ_3-最优性.

关键词: 混合Cayley图; 限制性边连通度; 原子; 最优性
中图分类号: O157.5
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)01-0114-07

§1　引　言

网络可模型化为一个无环和没有重边的图. 本文中$X=(V,E)$是点集为$V=V(X)$, 边集为$E=E(X)$的有限无向简单图. 令$u\in V(X)$, X_1, X_2是X的两个子图. 定义$N(u)=\{v\in V(X)\setminus\{u\}: v$与$u$相邻$\}$, $d(u)=|N(u)|$是u在X中的度, $N_{X_1}(X_2)=\{v\in V(X_1)\setminus V(X_2): v$与$X_2$中的某个点相邻$\}$. 令$\delta(X)=\min\{d(u): u\in V(X)\}$, $\varDelta(X)=\max\{d(u): u\in V(X)\}$, A是$V(X)$的一个子集. 定义$X[A]$是X 中由A导出的子图, $N(A)=\{u\in V(X)\setminus A: u$与$A$中的某个点相邻$\}$. 对于两个不交的点集$A$和$B$, 令$(A,B)=\{xy\in E(X): x\in A,\ y\in B\}$, $|(A,B)|$为(A,B)的边数. 若$\overline{A}=V\setminus A$, 记$\omega(A)=(A,\overline{A})$. 文中未定义的概念和术语可参看文[1].

令$F\subseteq E(X)$, 称F为X的一个限制性边割如果$X-F$不连通且不包含孤立点. 所有限制性边割中最小的基数称为X的限制性边连通度, 记为$\lambda'(X)$. 若一个图有限制性边割, 则称该图为λ'-连通的. 用$\xi(X)=\min\{d(u)+d(v)-2: uv\in E(X)\}$表示图的最小边度. Esfahanian和Hakimi在文[2]中证明了每个图X只要点数$n(X)\geq 4$, 且不是星, 是λ'-连通的且$\lambda'(X)\leq\xi(X)$. 如果$\lambda'(X)=\xi(X)$, 则X称为λ'-最优的, 否则称X不是λ'-最优的.

作为推广, 如果$X-S$不连通且$X-S$的每个分支至少含k个点, 连通图X的边集$S\subseteq E(X)$称为X的k-限制性边割. X的k-限制性边连通度定义为最小k-限制性边割的基数, 记为$\lambda_k(G)$. 最小k-限制性边割称为λ_k-割. 图X称为λ_k-连通图如果$\lambda_k(X)$存在. 显然$\lambda_2(X)=\lambda'(X)$. 易知若X是λ_k-连通的($k\geq 2$), 则X也是λ_{k-1}-连通的且$\lambda_{k-1}(X)\leq\lambda_k(X)$. 近几年对$k$-限制性边连通度的研究发现, $\lambda_k(X)$越大, 网络的可靠性越好(参看文[3-4]). 因此期望$\lambda_k(X)$尽可能的大.

收稿日期: 2020-12-09　　修回日期: 2023-10-11
*通讯作者, E-mail: clhhuel@qq.com
基金项目: 国家自然科学基金(11961067); 新疆自然科学基金(2020D04046)

显然$\lambda_k(X)$的最优性首先就需要一个上界. 对任意的正整数k, 令$\xi_k(X)$ =min$\{|(A,\overline{A})|:A\subseteq V(X),|A|=k,X[A]$是连通的$\}$. 如果$\lambda_k(X)=\xi_k(X)$, 则$X$称为极大$k$-限制性边连通图, 简记为$\lambda_k$-最优图. 如果$|(A,\overline{A})|=\lambda_k(X)$, 则$A\subseteq V(X)$称为$\lambda_k$-碎片. 显然, 如果$A$是一个$\lambda_k$-碎片, 则$\overline{A}$也是一个$\lambda_k$-碎片. 令$r_k=r_k(X)$ =min$\{|A|:A$为X的一个λ_k-碎片$\}$. 一个λ_k-碎片A称为X的λ_k-原子如果$|A|=r_k$. 显然, $k\le r_k\le \frac{1}{2}|V(X)|$. 若$A$是$\lambda_k$-原子, 则$X[A]$和$X[\overline{A}]$都是连通的. 限制性边连通度是比经典边连通度更精确的一种网络容错性的测量方法. 因此限制性边连通度在近些年受到了广泛关注, 比如文[5-9]. 本文确定了混合Cayley图的λ_3-最优性.

令X_1, X_2, $\cdots$, X_n是K_t的n个复制. 现增加一个新顶点u并且让u与$V(X_i)(i=1,2,\cdots,n)$中的每个顶点都相连, 得到的新图记为$X^*_{n,t}$. 可以证明$X^*_{n,t}$没有$(\delta(X^*_{n,t})+1)$-限制性边割. 由文[9]中的如下定理可知, 在满足$k\le\delta(X^*_{n,t})+1$的情况下, $X^*_{n,t}$是唯一不存在k-限制性边割的图.

定理1.1[9] 令X是顶点数为$2(\delta(X)+1)$的连通图且X不同构于$X^*_{n,t}$, 其中$t=\delta(X)$, 则任意的$k\le\delta(X)+1$, X有k-限制性边割且$\lambda_k(X)\le\xi_k(X)$.

在文献[5]中, Bonsma等人给出了如下的结果.

定理1.2[5] 如果X是λ_3-连通图, 则$\lambda_3(X)\le\xi_3(X)$. 更进一步地, λ_3-连通图X是λ_3- 最优的当且仅当$r_3=3$.

文[10]可找到如下定义.

定义1.3[10] 令G是一个有限群, S_0, S_1, S_2是G的子集, 其中$1_G\notin S_i$, $S_i^{-1}=S_i(i=0,1)$. 则混合Cayley图$X=MC(G,S_0,S_1,S_2)$是点集为$V(X)=G\times\{0,1\}$和边集为$E(G)=E_0\cup E_1\cup E_2$的图, 其中$E_i=\{\{(g,i),(s_ig,i)\}:g\in G,s_i\in S_i\}(i=0,1)$, $E_2=\{\{(g,0),(s_2g,1)\}:g\in G,s_2\in S_2\}$.

对于$g\in G$, 定义变换$MR(g)$为X上$(x,i)\to(xg,i)(i=0,1)$的自同构映射. 所有的这些自同构形成自同构群$Aut(X)$的一个子群$MR(G)$, 在$G\times\{0\}$和$G\times\{1\}$上都分别作用传递, 因此X至多有两个轨道. 在本文中, 我们将刻画连通混合Cayley图的3-限制性边连通度. 由定理1.1知, $X=MC(G,S_0,S_1,S_2)$有一个3-限制性边割且$\lambda_3(X)\le\xi_3(X)$.

§2 混合Cayley图的λ_3-原子

令P_n为n个顶点的路. 类似于文献[11]中的引理2和定理3, 我们有下面的结论.

引理2.1 已知X是非λ_3-最优连通图, F为X的一个λ_3-碎片, U 为F的真子集, I_1为$X-\omega(U)$中的所有孤立点, I_2为$X-\omega(U)$中的所有路分支P_2的点构成的集合, 记$I=I_1\cup I_2$. 如果$I\subseteq U$且$|(I,\overline{F})|\ge|(I,F\setminus U)|$, 则$F\setminus I$为$X$的一个$\lambda_3$-碎片.

证 如果$I=\varnothing$, 则显然成立. 接下来假设$I\neq\varnothing$. 令$A=F\setminus I$, $F'=F\setminus U$. 令B_1为$X-\omega(A)$中的所有孤立点构成的集合, B_2为$X-\omega(A)$中的所有路分支P_2的点构成的集合, 记$B=B_1\cup B_2$. 如果$B=\varnothing$, 则因为F为X的一个λ_3-碎片，所以A是X的3-限制性点割. 因为$|(I,\overline{F})|\ge|(I,F')|$, 所以

$$\lambda_3(X)\le|\omega(A)|=|\omega(F)|-|(I,\overline{F})|+|(I,F')|\le|\omega(F)|=\lambda_3(X).$$

这意味着A为X的一个λ_3-碎片, 因此$B=\varnothing$结论成立. 接下来假设$B\neq\varnothing$.

目标1 对任意的$x\in I$, $(x,\overline{F})\neq\varnothing$.

记$I'=\{x\in I:(x,\overline{F})=\varnothing\}$. 如果$I'\neq\varnothing$, 则因为$(I,U\setminus I)=\varnothing$, 所以$N(I')\subseteq F'$. 令$B'=(B\cap F')\setminus N(I')$, $C=(A\cup I')\setminus B'$. 很容易发现$X-\omega(C)$没有孤立点, 因此$\omega(C)$为X的

一个3-限制性边割. 如果$I \setminus I' = \varnothing$, 则$A = F \setminus I = F \setminus I'$. 因为$(B', F \setminus I) = \varnothing$, 与$F$为$\lambda_3$-碎片矛盾, 所以$I \setminus I' \neq \varnothing$, 且

$$|(I \setminus I', \overline{F})| \geq |(I, F')| \geq |(I', F' \setminus B')| + |(I \setminus I', F' \setminus B')| > |(I \setminus I', F' \setminus B')|.$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda_3(X) &\leq |\omega(C)| = |\omega(F)| - |(B', \overline{F})| - |(I \setminus I', \overline{F})| + |(I \setminus I', F' \setminus B')| \\ &< |\omega(F)| - |(B', \overline{F})| \leq |\omega(F)| = \lambda_3(X).\end{aligned}$$

这意味着$I' = \varnothing$, 也就是对任意的$x \in I$, $(x, \overline{F}) \neq \varnothing$.

目标2 $B = N(I) \cap F'$.

由目标1知, $B \subseteq A$. 因为$B = B_1 \cup B_2$, 且$X - \omega(F)$没有孤立点, 其中B_1为$X - \omega(A)$中的所有孤立点, B_2为$X - \omega(A)$中的所有路分支P_2的点构成的集合, 所以$B \subseteq N(I)$. 由假设知$N(I) \cap U = \varnothing$. 因此$B \subseteq N(I) \cap F'$. 如果$(N(I) \cap F') \setminus B \neq \varnothing$, 则因为$F$是$X$的$\lambda_3$-碎片, 所以$A \setminus B \neq \varnothing$且$X - \omega(A \setminus B)$中的每个分支至少包含三个顶点. 因为$I \neq \varnothing$且$\varnothing \neq B \subseteq N(I) \cap F'$, 所以$(I, B) \neq \varnothing$. 又因为$|(I, \overline{F})| \geq |(I, F')|$, 所以

$$\begin{aligned}\lambda_3(X) &\leq |\omega(A \setminus B)| = |\omega(F)| - |(I, \overline{F})| - |(B, \overline{F})| + |(I, F' \setminus B)| \\ &< |\omega(F)| - |(I, \overline{F})| + |(I, F')| \\ &\leq |\omega(F)| = \lambda_3(X),\end{aligned}$$

矛盾, 因此$B = N(I) \cap F'$.

目标3 对任意的$z \in B$, $(z, \overline{F}) \neq \varnothing$.

如果对某个$z \in B$有$(z, \overline{F}) = \varnothing$, 则因为$N(B) \cap (A \setminus B) = \varnothing$, 所以$z$在$X - \omega(U)$中属于$I_1$或属于$I_2$, 即$z \in I$, 而$I \subseteq U$, $B \subseteq F \setminus U$, 矛盾.

目标4 $A \setminus B = \varnothing$.

假设$A \setminus B \neq \varnothing$. 因为$B = N(I) \cap F'$, 所以$(A \setminus B, I) = (A \setminus B, B) = \varnothing$. 因为$X - \omega(A \setminus B)$中的每个分支至少含三个顶点, 所以$|\omega(A \setminus B)| \geq \lambda_3(X)$. 因为$(I, \overline{F}) \neq \varnothing$和$(B, \overline{F}) \neq \varnothing$, 所以

$$\lambda_3(X) \leq |\omega(A \setminus B)| = |(A \setminus B, \overline{F})| = |(F, \overline{F})| - |(I, \overline{F})| - |(B, \overline{F})| < |\omega(F)| = \lambda_3(X),$$

矛盾, 故$A \setminus B = \varnothing$.

由目标4知$F = I \cup B$. 因为F为X的λ_3-碎片, 所以$X(F)$中存在一个长度为3的路, 记为$P_3 = x_1x_2x_3$. 不失一般性, 设$x_1 \in I_1$, $x_2, x_3 \in B_2$. 则有以下的矛盾

$$\begin{aligned}\lambda_3(X) &\leq |N(\{x_1, x_2, x_3\})| \\ &= |N(\{x_1, x_2, x_3\}) \cap \overline{F}| + |N(x_1) \cap (B \setminus \{x_2, x_3\})| + |N(\{x_2, x_3\}) \cap (I \setminus \{x_1\})| \\ &\leq |(\{x_1, x_2, x_3\}, \overline{F})| + |(N(x_1) \cap (B \setminus \{x_2, x_3\}), \overline{F})| + |(N(\{x_2, x_3\}) \cap (I \setminus \{x_1\}), \overline{F})| \\ &= |(N(\{x_2, x_3\}) \cap I, \overline{F})| + |(N(x_1) \cap B, \overline{F})| \\ &\leq |(I, \overline{F})| + |(B, \overline{F})| = |\omega(F)| \\ &= \lambda_3(X) < \xi_3(X).\end{aligned}$$

定理2.2 已知X不是λ_3-最优连通图, 则X中任意两个不同的λ_3-原子是无交的.

证 设A和B为X中两个不同的λ_3-原子. 则由定理1.2知$|\omega(A)| = |\omega(B)| = \lambda_3(X) < \xi_3(X)$, $|A| = |B| = r_3 \geq 4$. 记$X_1 = A \cap B$, $X_2 = A \cap \overline{B}$, $X_3 = \overline{A} \cap B$, $X_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$. 则$|X_2| =$

$|X_3| = r_3 - |X_1| \geq 1$且$|X_4| \geq |X_1|$. 对于$X_1 \neq \varnothing$, 令$I_1$为$X - \omega(X_1)$中所有孤立点构成的集合, I_2为$X - \omega(X_1)$ 中路分支P_2的所有点构成的集合, 记$I = I_1 \cup I_2$. 下面分两种情况讨论.

情况1 $I \neq \varnothing$.

因为A和B为X的λ_3-原子, 所以$I \subseteq X_1$, $(I, X_2) \neq \varnothing$且$(I, X_3) \neq \varnothing$. 又因为$X_1$为$A$的真子集, 不妨假设$|(I, B \setminus X_1)| \geq |(I, A \setminus X_1)|$, 则$|(I, \overline{A})| \geq |(I, X_3)| = |(I, B \setminus X_1)| \geq |(I, A \setminus X_1)|$, 所以由引理2.1知$A \setminus I$为$X$的$\lambda_3$-碎片. 这与$A$是$X$的$\lambda_3$-原子矛盾.

情况2 $I = \varnothing$.

这意味着$\omega(X_1)$为X的一个3-限制性边割, $|X_1| \geq 3$, $|\omega(X_1)| > \lambda_3(X)$. 对于$V(X)$的两个不交的非空子集$A$和$B$, 因为(参看文[12])

$$|\omega(A \cap B)| + |\omega(A \cup B)| \leq |\omega(A)| + |\omega(B)|,$$

所以

$$|\omega(X_4)| = |\omega(A \cup B)| \leq |\omega(A)| + |\omega(B)| - |\omega(A \cap B)| < \lambda_3(X).$$

这意味着X_4不是X的λ_3-碎片. 令Y_1是$X - \omega(X_4)$中所有孤立点构成的集合, Y_2为$X - \omega(X_4)$中路分支P_2的所有点构成的集合, 记$Y = Y_1 \cup Y_2$. 显然$Y \subseteq X_4$. 如果$X_4' = X_4 \setminus Y \neq \varnothing$, 则$\omega(X_4')$是$X$的一个3-限制性边割. 因此

$$\lambda_3(X) \leq |\omega(X_4')| = |\omega(X_4)| - |\omega(Y)| < |\omega(X_4)| < \lambda_3(X),$$

所以$Y = X_4$. 因为$\overline{A}$是X的λ_3-碎片, Y是$\overline{A}$的真子集, 不妨假设$|(Y, \overline{B} \setminus Y)| \geq |(Y, \overline{A} \setminus Y)|$, 则$|(Y, A)| \geq |(Y, X_2)| = |(Y, \overline{B} \setminus Y)| \geq |(Y, \overline{A} \setminus Y)|$, 所以由引理2.1知$\overline{A} \setminus Y$是$X$的一个$\lambda_3$-碎片, 这与$B$是$X$的$\lambda_3$-原子矛盾.

综上所述, 结论成立.

接下来假设$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$是混合Cayley图, $V(X) = X_0 \cup X_1$, 其中$X_i = G \times i (i = 0, 1)$, $k_i = |S_i| (i = 0, 1, 2)$. 显然, X的最小度和最大度分别为$\delta(X) = \min\{k_0 + k_2, k_1 + k_2\}$和$\Delta(X) = \max\{k_0 + k_2, k_1 + k_2\}$.

类似于文献[7]中的引理3.1和3.2, 有下面的引理2.3和引理2.4.

引理2.3 已知$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$是顶点数$n \geq 6$和最小度$\delta \geq 2$的连通图. 假设A是X的一个λ_3-原子且$A_i = A \cap X_i \neq \varnothing (i = 0, 1)$. 如果$X$不是$\lambda_3$-最优的, 则

(1) $V(X)$是不同λ_3-原子的无交并; (2) $|A_0| = |A_1| \geq 2$.

引理2.4 已知$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$是顶点数$n \geq 6$和最小度$\delta \geq 2$的连通图. 假设X不是λ_3-最优的. A 是X的λ_3-原子, $Y = X[A]$是由A导出的X的子图且$A_i = A \cap X_i = H_i \times \{i\} (i = 0, 1)$, 其中$H_i \subseteq G$.

(1) 如果对某个$i \in \{0, 1\}$有$A_i \neq \varnothing$, 令$Y_i = X[A_i]$是由A_i导出的X的子图, 则$Aut(Y_i)$在A_i上作用传递. 进一步的, 如果$A_i \neq \varnothing (i = 0, 1)$, 则$Aut(Y)$在$A_0$和$A_1$上都作用传递;

(2) 如果对某个$i \in \{0, 1\}$, A_i包含点$(1_G, i)$, 则H_i是G的子群.

如果$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$是k-正则图, 则$k_0 = k_1$, $k = k_0 + k_2 = k_1 + k_2$.

引理2.5 已知$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$是顶点数$n \geq 6$的连通图. 假设X不是λ_3-最优的.

(1) 如果围长$g(X) = 3$, 则$r_3 \geq k - 1$; (2) 如果围长$g(X) \geq 4$, 则$r_3 \geq k$.

证 由定理1.2知$r_3 \geq 4$, $k \geq 3$. 令A是X的λ_3-原子, 则$r_3 = |A|$且$|\omega(A)| = \lambda_3(X)$.

(1) 当围长$g(X)=3$时, $\lambda_3(X)<\xi_3(X)=3k-6$. 对于$A$的所有顶点的度和, 有

$$kr_3=\sum_{x\in A}d(x)\le r_3(r_3-1)+|\omega(A)|<r_3^2-r_3+3k-6,$$

即$kr_3-3k-r_3^2+r_3+6<0$, 因式分解得$(r_3-3)(k-r_3-2)<0$. 因为$r_3\ge 4$, 所以$r_3\ge k-1$.

(2) 当围长$g(X)\ge 4$时, $\lambda_3(X)<\xi_3(X)=3k-4$, 此时$A$的所有顶点的度和满足

$$kr_3=\sum_{x\in A}d(x)\le r_3(r_3-2)+|\omega(A)|<r_3^2-2r_3+3k-4,$$

即

$$kr_3-3k-r_3^2+3<kr_3-3k-r_3^2+2r_3+4<0,$$

因此

$$(r_3-3)(k-r_3-1)<0.$$

因为$r_3\ge 4$, 所以$r_3\ge k$.

如果$X=MC(G,S_0,S_1,S_2)$不是正则图, 不失一般性, 假设$k_0<k_1$, 则最小度$\delta=k_0+k_2$和最大度$\Delta=k_1+k_2$. 利用类似于上面的方法, 有下面的引理.

引理2.6 已知$X=MC(G,S_0,S_1,S_2)$是顶点数$n\ge 6$和最小度$\delta\ge 2$的连通图. 假设A是X的λ_3-原子, X不是λ_3-最优的.

(1) 当围长$g(X)=3$时. 如果$A\subseteq X_0$, 则$r_3=|A|\ge\delta-1$; 如果$A\subseteq X_1$, 则$r_3=|A|\ge\Delta-1$; 如果$A\cap X_i\ne\varnothing(i=0,1)$, 则$r_3=|A|\ge\lceil\frac{1}{2}(\delta+\Delta)\rceil-1$;

(2) 当围长$g(X)\ge 4$时. 如果$A\subseteq X_0$, 则$r_3=|A|\ge\delta$; 如果$A\subseteq X_1$, 则$r_3=|A|\ge\Delta$; 如果$A\cap X_i\ne\varnothing(i=0,1)$, 则$r_3=|A|\ge\lceil\frac{1}{2}(\delta+\Delta)\rceil$.

§3 混合Cayley图的λ_3-最优性

定理3.1 已知$X=MC(G,S_0,S_1,S_2)$是顶点数$n\ge 6$的k-正则连通图. 如果围长$g(X)=3$和$k_2\ge 3$, 则X不是λ_3-最优的当且仅当X满足下面的其中一个条件.

(1) 存在G的子群H, S_0的逆闭子集$\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}$, S_1的逆闭子集$\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}$ $(1\le m+n\le 5)$和元素$s_2\in S_2$ 满足$|H|<\frac{1}{m+n}(3k-6)$, $\langle(S_0\cup\{1_G\})\setminus\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}\rangle\le H$, $\langle S_2^{-1}S_2\rangle\le H$和$\langle(S_1\cup\{1_G\})\setminus\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}\rangle\le s_2Hs_2^{-1}$;

(2) 存在G的子群H, S_0的逆闭子集$\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}$, S_1的逆闭子集$\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}$ $(0\le m+n\le 3)$和两个不同的元素$s_2,s_2'\in S_2$满足$|H|<\frac{1}{m+n+2}(3k-6)$, $\langle(S_0\cup\{1_G\})\setminus\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}\rangle\le H$, $\langle(S_2\setminus\{s_2'\})^{-1}(S_2\setminus\{s_2'\})\rangle\le H$和$\langle(S_1\cup\{1_G\})\setminus\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}\rangle\le s_2Hs_2^{-1}$;

(3) 存在G的子群H, S_0的逆闭子集$\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}$, S_1的逆闭子集$\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}$ $(0\le m+n\le 1)$和三个不同的元素$s_2,s_2',s_2''\in S_2$满足$|H|<\frac{1}{m+n+4}(3k-6)$, $\langle(S_0\cup\{1_G\})\setminus\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}\rangle\le H$, $\langle(S_2\setminus\{s_2',s_2''\})^{-1}(S_2\setminus\{s_2',s_2''\})\rangle\le H$和$\langle(S_1\cup\{1_G\})\setminus\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}\rangle\le s_2Hs_2^{-1}$.

证 对于条件(1), 令$A=H\times\{0\}\cup s_2H\times\{1\}$. 因为围长$g(X)=3$, $\xi_3(X)=3k-6$. 很容易发现$\omega(A)$为X的λ_3-限制性边割. 因为$|H|<\frac{1}{m+n}(3k-6)$, $\langle(S_0\cup\{1_G\})\setminus\{s_{01},\cdots,s_{0m}\}\rangle\le H$, $\langle S_2^{-1}S_2\rangle\le H$, 且$\langle(S_1\cup\{1_G\})\setminus\{s_{11},\cdots,s_{1n}\}\rangle\le s_2Hs_2^{-1}$, 所以$\lambda_3(X)\le|\omega(A)|=(m+n)|H|<3k-6=\xi_3(X)$. 因此$X$不是$\lambda_3$-最优的.

条件(2)和(3)证明类似于条件(1).

下面证明必要性.

令A为λ_3-原子. 因为X不是λ_3-最优的, 所以由定理1.2知$r_3 = |A| \geq 4$. 这样就有$A \not\subseteq X_0$和$A \not\subseteq X_1$, 也就是$A_i = A \cap X_i \neq \varnothing (i = 0, 1)$. 令$A_i = H_i \times \{0\} (i = 0, 1)$. 不失一般性, 假设$(1_G, 0) \in A_0$, 则由引理2.4知$H_0 \leq G$. 因为$X[A]$连通, 所以存在$s_2 \in S_2$满足$H_1 = s_2 H_0$. 因为$H_0 \leq G$, 所以$G = \cup_{i=1}^{k} H_0 g_i (g_1 = 1_G)$. 因此, $V(X) = \cup_{i=1}^{k} MR(g_i)(A)$, $X_0 = \cup_{i=1}^{k} MR(g_i)(A_0) = \cup_{i=1}^{k} H_0 g_i \times \{0\}$, 且$X_1 = \cup_{i=1}^{k} s_2 H_0 g_i \times \{1\}$.

由引理2.4, 导出子图$Y_i = X[A_i] (i = 0, 1)$和$Y' = X[A] \setminus (E(Y_0) \cup E(Y_1))$都是正则的. 假设$Y_i$是$r_i$-正则图$(i = 0, 1)$, Y'是d-正则图, 则$\lambda_3(X) = |\omega(A)| = |A_0|(k_0 - r_0) + |A_1|(k_1 - r_1) + |A|(k_2 - d) < 3k - 6$. 由$|A| \geq k - 1$得$|A_0| = |A_1| \geq \frac{k-1}{2}$. 令$k_0 - r_0 = m$, $k_1 - r_1 = n$和$k_2 - d = t$. 有$t \leq 2$和$|H_0| < \frac{1}{m+n+2t}(3k - 6)$. 下面分三种情况讨论.

情况1 $k_2 - d = 0$.

因为$k_2 - d = 0$和$|H_0| < \frac{1}{m+n+2t}(3k - 6)$, 所以$1 \leq m + n \leq 5$. 因为$k_0 - r_0 = m$, 所以存在$S_0$的逆闭子集$\{s_{01}, \cdots, s_{0m}\}$满足$\langle (S_0 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{01}, \cdots, s_{0m}\} \rangle \leq H_0$. 假设$(1_G, 1) \in s_2 H_0 g_s \times \{1\}$, 则$1_G = s_2 h_0 g_s (h_0 \in H_0)$ 和$g_s = h_0^{-1} s_2^{-1}$. 因为$MR(g_s)(A)$也是λ_3-原子且$k_1 - r_1 = n$, 所以存在S_1的逆闭子集$\{s_{11}, \cdots, s_{1n}\}$满足$\langle (S_1 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{11}, \cdots, s_{1n}\} \rangle \leq s_2 H_0 g_s = s_2 H_0 s_2^{-1}$. 因为$k_2 - d = 0$, 所以对任意的$s_2' \in S_2$有$s_2' H_0 = s_2 H_0$. 因此$\langle S_2^{-1} S_2 \rangle \leq H$.

情况2 $k_2 - d = 1$.

由$k_2 - d = 1$知$0 \leq m + n \leq 3$. 因为$k_0 - r_0 = m$, 所以存在S_0的逆闭子集$\{s_{01}, \cdots, s_{0m}\}$满足$\langle (S_0 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{01}, \cdots, s_{0m}\} \rangle \leq H_0$. 假设$(1_G, 1) \in s_2 H_0 g_s \times \{1\}$, 则$1_G = s_2 h_0 g_s (h_0 \in H_0)$和$g_s = h_0^{-1} s_2^{-1}$. 由$MR(g_s)(A)$也是$\lambda_3$-原子且$k_1 - r_1 = n$, 则有$S_1$的逆闭子集$\{s_{11}, \cdots, s_{1n}\}$满足$\langle (S_1 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{11}, \cdots, s_{1n}\} \rangle \leq s_2 H_0 g_s = s_2 H_0 s_2^{-1}$. 因为$k_2 - d = 1$, 所以存在一个元素$s_2' \in S_2$满足$s_2' H_0 \neq s_2 H_0$, 且对任意的$s_2'' \in S_2 \setminus \{s_2'\}$有$s_2'' H_0 = s_2 H_0$. 因此$\langle (S_2 \setminus \{s_2'\})^{-1} (S_2 \setminus \{s_2'\}) \rangle \leq H$.

情况3 $k_2 - d = 2$.

由$k_2 - d = 2$知$0 \leq m + n \leq 1$. 因为$k_0 - r_0 = m$, 所以存在S_0的逆闭子集$\{s_{01}, \cdots, s_{0m}\}$满足$\langle (S_0 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{01}, \cdots, s_{0m}\} \rangle \leq H_0$. 假设$(1_G, 1) \in s_2 H_0 g_s \times \{1\}$, 则$1_G = s_2 h_0 g_s (h_0 \in H_0)$和$g_s = h_0^{-1} s_2^{-1}$. 由$MR(g_s)(A)$也是$\lambda_3$-原子且$k_1 - r_1 = n$, 则有$S_1$的逆闭子集$\{s_{11}, \cdots, s_{1n}\}$满足$\langle (S_1 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{11}, \cdots, s_{1n}\} \rangle \leq s_2 H_0 g_s = s_2 H_0 s_2^{-1}$. 因为$k_2 - d = 2$, 所以存在两个不同的元素$s_2', s_2'' \in S_2$满足$s_2' H_0 \neq s_2 H_0$和$s_2'' H_0 \neq s_2 H_0$, 且对任意的$s' \in S_2 \setminus \{s_2', s_2''\}$有$s' H_0 = s_2 H_0$. 因此$\langle (S_2 \setminus \{s_2', s_2''\})^{-1} (S_2 \setminus \{s_2', s_2''\}) \rangle \leq H$.

类似于上面的方法, 可以得到如下的结论.

定理3.2 已知$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$是顶点数$n \geq 6$的k-正则连通图. 如果围长$g(X) = 3$且$k_2 \leq 2$, 则X不是λ_3-最优的当且仅当X满足下面的其中一个条件:

(1) 存在G的子群H满足$|H| < \frac{1}{k_2}(3k - 6)$和$\langle S_0 \rangle \leq H$;

(2) 存在G的子群H和元素$s_0 \in S_0$满足$|H| < \frac{1}{k_2+1}(3k - 6)$和$\langle S_0 \setminus \{s_0\} \rangle \leq H$;

(3) 存在G的子群H满足$|H| < \frac{1}{k_2}(3k - 6)$和$\langle S_1 \rangle \leq H$;

(4) 存在G的子群H和元素$s_1 \in S_1$满足$|H| < \frac{1}{k_2+1}(3k - 6)$和$\langle S_1 \setminus \{s_1\} \rangle \leq H$;

(5) 存在G的子群H, S_0的逆闭子集$\{s_{01}, \cdots, s_{0m}\}$, S_1的逆闭子集$\{s_{11}, \cdots, s_{1n}\}$ $(1 \leq m + n \leq 5)$满足$|H| < \frac{1}{m+n}(3k - 6)$, $\langle (S_0 \cup \{1_G\}) \setminus \{s_{01}, \cdots, s_{0m}\} \rangle \leq H$, $\langle (S_2)^{-1} (S_2) \rangle \leq H$和$\langle (S_1 \cup$

$\{1_G\}) \setminus \{s_{11}, \cdots, s_{1n}\}\rangle \leq s_2 H s_2^{-1}$.

对于围长$g \geq 4$的k-正则连通图$X = MC(G, S_0, S_1, S_2)$和非正则连通图X, 可以利用类似的方法得到相应的结论.

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application II[M]. New York: Springer, 2008.

[2] Esfahanian A H, Hakimi S L. On computing a conditional edge connectivity of a graph[J]. Inform Process Lett, 1988, 27: 195-199.

[3] Meng Jixiang. Optimally super-edge-connected transitive graphs[J]. Discrete Math, 2003, 260: 239-248.

[4] Meng Jixiang, Ji Youhu. On a kind of restricted edge connectivity of graphs[J]. Discrete Appl Math, 2002, 117: 183-193.

[5] Bonsma P, Ueffing N, Volkmann L. Edge-cuts leaving components of order at least three[J]. Discrete Math, 2002, 256: 431-439.

[6] Lou Dingjun, Wang Wei. Characterization of graphs with infinite cyclic edge connectivity[J]. Discrete Math, 2008, 308: 2094-2103.

[7] Tian Yingzhi, Meng Jixiang. λ'-optimally of mixed Cayley graph[J]. Appl Math Lett, 2011, 24: 872-877.

[8] Yang Weihua, Zhang Zhao, Qin Chengfu, et al. On super 2-restricted and 3-restricted edge-connected vertex transitive graphs[J]. Discrete Math, 2011, 311: 2683-2689.

[9] Zhang Zhao, Yuan Jinjiang. A proof of an inequality concerning k-restricted edge connectivity[J]. Discrete Math, 2005, 304: 128-134.

[10] Chen Jinyang, Meng Jixiang, Huang Lihong. Super edge-connectivity of mixed Cayley graph[J]. Discrete Math, 2009, 309: 264-270.

[11] Xu Junming, Xu Keli. On restricted edge connectivity of graphs[J]. Discrete Math, 2002, 243: 291-298.

[12] Lovász L. Combinatorial Problems and Exercises[M]. North-Holland, Amsterdam, New York: Oxford, 1979.

λ_3-optimally connected mixed Cayley graph

CHEN Lai-huan[1], MENG Ji-xiang[2], LIU Feng-xia[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450003, China;

2. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: For a connected graph $X = (V, E)$, an edge set $F \subseteq E$ is a k-restricted edge cut if $X - F$ is disconnected such that every component of $X - F$ has at least k vertices. The k-restricted edge connectivity $\lambda_k(X)$ of the graph X is the cardinality of a minimum k-restricted edge cut of X. The article provides the 3-restricted edge connectivity and the λ_3-optimal of the mixed Cayley graphs.

Keywords: mixed Cayley graph; restricted edge connectivity; atom; optimal

MR Subject Classification: 05C