高校应用数学学报
2024, 39(1): 105-113

由路代数构造的李代数的同构

叶 昌

(湖州师范学院 理学院, 浙江湖州 313000)

摘 要: 通过路代数的乘法可以自然的构造出李代数. 首先给出了无定向圈的路代数构造的李代数的中心. 然后证明了两个无定向圈的箭图构造的李代数同构, 则存在保次的李代数同构. 最后给出了两个交替箭图构造的李代数同构的充要条件是它们有相同的顶点数与箭向数.

关键词: 路代数; 李代数; 同构; 交替箭图

中图分类号: O153.3

文献标识码: A **文章编号**: 1000-4424(2024)01-0105-09

§1 引 言

利用箭图方法将一个代数用一种容易理解和方便运用的方式表示出来, 这是代数表示论中强有力的工具[1]. 刘绍学, 罗运纶, 肖杰证明了两个箭图是同构的当且仅当它们的路代数是同构的[2]. 因此, 可以将箭图的几何性质与其路代数的代数性质联系起来. 刘绍学给出了箭图的路代数是Artin代数, Noether代数, 半本原代数, 素代数的充要条件[3], 并将这些结果推广到路代数的张量积上[4]. 周柏荣给出了箭图的路代数是Goldie代数, 局部代数, Σ-链模代数的充要条件[5]. 刘绍学还将箭图的同构定理推广到赋值图上[6]. 肖杰证明了任意有限有向囿的路代数及其局部化代数是遗传环, 它们的投射模是顶点投射模的直和[7]. 李方, 谭德展对有圈路代数的Hochschild分次上同调进行了刻画[8].

李代数在数学, 古典力学和量子力学中有很多应用[9-10]. 一个结合代数可以自然地构造一个李代数. 路代数是一个结合代数, 所以自然可以构造一个李代数. 考虑由路代数构造的李代数的代数性质与箭图的几何性质的关系就成为一个值得探讨的问题. 高凤霞, 韩红梅证明了由无定向圈的路代数构造的李代数均可解, 并给出了其所有卡当子代数[11].

本文将考虑从两个箭图出发构造的李代数同构, 则这两个箭图是什么样的关系. §2是预备知识, 介绍箭图, 路代数, 由路代数构造的李代数等基本概念; §3研究由路代数构造的李代数的中心, 证明了对于无定向圈的箭图, 它构造的李代数的中心是由箭图的每个连通分支的所有顶点之和为基生成的线性空间, 且若两个箭图构造的李代数同构, 则它们有相同个数的连通分支; §4证明了若两个箭图构造的李代数同构, 则存在保次的李代数同构; §5给出了由两个交替箭图构造的李代数同构的充要条件是它们有相同的顶点数与箭向数.

收稿日期: 2022-09-01 修回日期: 2023-04-26
基金项目: 国家自然科学基金(11901195); 湖州师范学院校级科研项目(2018XJKJ48)

§2 预备知识

定义2.1 称$\Delta=(\Delta_0,\Delta_1,s,t)$为一个箭图, 其中$\Delta_0$和$\Delta_1$是两个集合, 称$\Delta_0$是$\Delta$的顶点集, Δ_1是Δ的箭向集, s,t是从Δ_1 到Δ_0的映射, 对于$\alpha\in\Delta_1, s(\alpha),t(\alpha)$分别叫做$\alpha$的起点和终点, 记为$a\xrightarrow{\alpha}b, a=s(\alpha), b=t(\alpha)$.

注2.2 为了方便也记一个箭图为$\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$.

定义2.3 箭图Δ中一条从a到b的道路记为$p=(a|\alpha_1,\cdots,\alpha_l|b)$如果对所有$1\le i<l$, $t(\alpha_i)=s(\alpha_{i+1}), a=s(\alpha_1), b=t(\alpha_l)$, 这条道路简记为$p=\alpha_1\cdots\alpha_n$. 另外对$\Delta$的每个顶点$a\in\Delta_0$, 约定一条长度为零的平凡路$a=(a|a)$. 一个从$a$到$a$的长度$\ge 1$的道路称为定向圈.

定义2.4 对于固定域K, 用$\mathcal{P}(\Delta)$表示Δ中所有道路的集合, 用$K\Delta$ 表示以所有道路为基生成的线性空间. $K\Delta=\{\sum_{h=1}^m a_hp_h \mid a_h\in K, p_h\in\mathcal{P}(\Delta), m\in\mathbb{N}\}$. 两个道路相乘定义为$(a\mid\alpha_1,\cdots,\alpha_l\mid b)(c|\beta_1,\cdots,\beta_n|d)=\begin{cases}(a|\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\ldots,\beta_n|d), & b=c\\ 0, & b\ne c\end{cases}$. 双线性扩张到$K\Delta$上, $(\sum_{h=1}^m a_hp_h)(\sum_{l=1}^n b_lq_l)=\sum_{h,l}a_hb_lp_hq_l$, 其中$a_h,b_l\in K, p_h,q_l\in\mathcal{P}(\Delta)$, 称为$\Delta$在$K$上的路代数.

注2.5 $K\Delta$是以$\sum_{a\in\Delta_0}(a\mid a)$为单位元的结合代数.

定义2.6 域K上的线性空间L如果有一个满足下列3个条件的二元运算$L\times L\to L: (x,y)\mapsto[x,y]$,

(1) 双线性的;

(2) 反对称的: 即$[x,y]=-[y,x]$;

(3) 满足Jacobi恒等式: 即$[x,[y,z]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\forall x,y,z\in L$,

则称L为域K上的李代数.

众所周知利用结合代数可以构造李代数.

定义2.7 路代数$K\Delta$ 生成的李代数$\mathfrak{g}(K\Delta)$是以$K\Delta$ 中所有道路为基作成域K上的线性空间$\mathfrak{g}(K\Delta)$, 定义二元运算为$[x,y]=xy-yx, x,y\in\mathfrak{g}(K\Delta)$, 其中$xy$和$yx$是由路代数中定义的乘法得到. 即

$$[x,y]=\begin{cases} xy, & \text{当}t(x)=s(y),s(x)\ne t(y);\\ -yx, & \text{当}s(x)=t(y),t(x)\ne s(y);\\ xy-yx, & \text{当}s(x)=t(y),t(x)=s(y);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定义2.8 箭图中连接两个顶点的一个通道是指忘记所有箭向的方向后连结两个顶点的道路, 箭图的两个顶点称为是相互连通的若存在连通这两个顶点的一个通道, 一个箭图称为是连通的若箭图的任意两个顶点都是连通的.

易知任意箭图是由它的所有连通分支构成.

$K\Delta$ 是有限维结合代数当且仅当$\mathfrak{g}(K\Delta)$是有限维李代数当且仅当Δ 中无定向圈. 接下来本文中讨论的都是无定向圈的箭图的情形.

§3 由路代数构造的李代数的中心

一个李代数$\mathfrak{g}$的中心$C(\mathfrak{g})$为$C(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} | [x, z] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$. 称李代数$\mathfrak{g}$和$\mathfrak{g}'$同构, 如果存在线性空间同构$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, 满足$\forall x, y \in \mathfrak{g}, f([x, y]) = [f(x), f(y)]$. 李代数$\mathfrak{g}$与$\mathfrak{g}'$同构, 则$C(\mathfrak{g})$与$C(\mathfrak{g}')$同构[12]. 本节先考虑$\mathfrak{g}(K\varDelta)$的中心.

定理3.1 李代数$\mathfrak{g}(K\varDelta)$的中心$C(\mathfrak{g}(K\varDelta))$是由$\varDelta$的每个连通分支的所有顶点之和为基生成的线性空间.

证 对于任意连通分支的所有顶点的和$\sum_{i=1}^{n} a_i$, 它与任意顶点的李运算为0. 对任意长度大于1的路于p, 假若路p的起点在这个连通分支中, 为某个a_i, 那么路p的终点也在这个连通分支里, 为某个a_j, 则路p与$\sum_{i=1}^{n} a_i$的李运算为0. 假若路p的起点不在在这个连通分支中, 那么路p的终点也不在这个连通分支中, 则路p与$\sum_{i=1}^{n} a_i$的李运算为0. 综上所述得到$[\mathfrak{g}(K\varDelta), \sum_{i=1}^{n} a_i] = 0, \sum_{i=1}^{n} a_i \in C(\mathfrak{g}(K\varDelta))$.

另一方面, $\forall y \in C(\mathfrak{g}(K\varDelta))$, 设$y = \sum k_i a_i + \sum l_j \rho_j$, 其中$a_i$是顶点的集合, ρ_j为长度大于等于1的路的集合. 因$[\rho_j, t(\rho_j)] = \rho_j$, 故$l_j = 0$, 所以有$y = \sum k_i a_i$. 因为对任意箭向$\alpha$, 若$[y, \alpha] = 0$, 则$y$或者同时包含$s(\alpha), t(\alpha)$, 且顶点系数相等, 或者同时不包含$s(\alpha), t(\alpha)$. 因此李代数$\mathfrak{g}(K\varDelta)$的中心$C(\mathfrak{g}(K\varDelta))$是由每个连通分支的所有顶点的和为基生成的线性空间.

推论3.2 李代数$\mathfrak{g}(K\varDelta)$与$\mathfrak{g}(K\varGamma)$同构, 则$\varDelta$与$\varGamma$有相同个数的连通分支.

证 因为李代数$\mathfrak{g}(K\varDelta)$与$\mathfrak{g}(K\varGamma)$同构, 则它们的中心同构, 结合定理3.1即可得.

§4 由路代数构造的李代数的保次同构

对于$\mathfrak{g}(K\varDelta)$, 有自然的$\mathbb{N}-$分次$\mathfrak{g}(K\varDelta) = \mathfrak{g}(K\varDelta)(0) \oplus \mathfrak{g}(K\varDelta)(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}(K\varDelta)(n) \oplus \cdots$, 其中$\mathfrak{g}(K\varDelta)(n)$是$\varDelta$中以所有长度等于$n$的道路为基生成的线性空间. 任一元素$x \in \mathfrak{g}(K\varDelta)$可唯一表为$x = x(0) + x(1) + \cdots$(有限和), 其中$x(n) \in \mathfrak{g}(K\varDelta)(n)$. 令$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ = \mathfrak{g}(K\varDelta)(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}(K\varDelta)(n) \oplus \cdots$. 因为$\varDelta$中无定向圈, 所以对$\varDelta$中任意长度$\geq 1$的道路$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, 有$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = [[[\alpha_1, \alpha_2], \cdots], \alpha_n]$. 易知$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$是$\mathfrak{g}(K\varDelta)$的理想.

引理4.1 设$\varDelta, \varGamma$为两个箭图, 若有李代数同构$f : \mathfrak{g}(K\varDelta) \to \mathfrak{g}(K\varGamma)$同构, 则$f$限制在$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$上有李代数同构$f : \mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$.

证 对$\mathfrak{g}(K\varDelta)$中任意长度大于等于1的道路α, 设$f(\alpha) = \sum m_i b_i + \sum n_j \beta_j$, 其中$b_i$是$\mathfrak{g}(K\varGamma)$中的顶点, β_j是$\mathfrak{g}(K\varGamma)$中长度大于等于1的道路, $m_i, n_j \in K$. 设α的起点为a, 因为$\varDelta$中无定向圈, α的终点不为a, 所以$[a, \alpha] = \alpha, f(\alpha) = f[a, \alpha] = [f(a), f(\alpha)]$. 设$f(a) = \sum p_s c_s + \sum q_t \gamma_t$, 其中$c_s$是$\mathfrak{g}(K\varGamma)$中的顶点, γ_t是$\mathfrak{g}(K\varGamma)$中长度大于等于1的道路, $p_s, q_t \in K$. 则

$$[f(a), f(\alpha)] = [\sum p_s c_s, \sum m_i b_i] + [\sum p_s c_s, \sum n_j \beta_j] + [\sum q_t \gamma_t, \sum m_i b_i + \sum n_j \beta_j].$$

易知$[\sum p_s c_s, \sum m_i b_i] = 0, [\sum p_s c_s, \sum n_j \beta_j] + [\sum q_t \gamma_t, \sum m_i b_i + \sum n_j \beta_j]$是长度大于等于1的道路的线性组合.

因为

$$\begin{aligned} & \sum m_i b_i + \sum n_j \beta_j = f(\alpha) = [f(a), f(\alpha)] \\ = & [\sum p_s c_s, \sum m_i b_i] + [\sum p_s c_s, \sum n_j \beta_j] + [\sum q_t \gamma_t, \sum m_i b_i + \sum n_j \beta_j] \\ = & [\sum p_s c_s, \sum n_j \beta_j] + [\sum q_t \gamma_t, \sum m_i b_i + \sum n_j \beta_j]\ , \end{aligned}$$

所以有$\sum m_i b_i = 0$. 所以f把$\mathfrak{g}(K\varDelta)$中任意长度大于等于1 的道路α映成$\mathfrak{g}(K\varGamma)$中长度大于等于1的道路的线性组合. 所以$f(\mathfrak{g}(K\varDelta)^+) \subset \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$. 同理$f^{-1}$把$\mathfrak{g}(K\varGamma)$中任意长度大于等于1 的道路映成$\mathfrak{g}(K\varDelta)$中长度大于等于1的道路的线性组合. 所以$f^{-1}(\mathfrak{g}(K\varGamma)^+) \subset \mathfrak{g}(K\varDelta)^+$. 所以$\mathfrak{g}(K\varGamma)^+ \subset f(\mathfrak{g}(K\varDelta)^+)$. 所以$f(\mathfrak{g}(K\varDelta)^+) = \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$, 即$f$限制在$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$上有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$.

推论4.2 若有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta) \to \mathfrak{g}(K\varGamma)$, 则$|\varDelta_0| = |\varGamma_0|$.

证 因为李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta) \to \mathfrak{g}(K\varGamma)$, 则由引理4.1 知$f$限制在$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$上有同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$. 则$\dim\mathfrak{g}(K\varDelta) = \dim\mathfrak{g}(K\varGamma), \dim\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ = \dim\mathfrak{g}(K\varGamma)^+$. 所以

$$|\varDelta_0| = \dim\mathfrak{g}(K\varDelta) - \dim\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ = \dim\mathfrak{g}(K\varGamma) - \dim\mathfrak{g}(K\varGamma)^+ = |\varGamma_0|.$$

定义4.3 李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta) \to \mathfrak{g}(K\varGamma)$称为是保次的, 如果$\forall n \geq 0, f(\mathfrak{g}(K\varDelta)(n)) = \mathfrak{g}(K\varGamma)(n)$. 李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$称为是保次的, 如果$\forall n \geq 1, f(\mathfrak{g}(K\varDelta)^+(n)) = \mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n)$.

引理4.4 如果有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$, 则存在保次的李代数同构

$$f_1:\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+.$$

证 因为有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta)^+ \to \mathfrak{g}(K\varGamma)^+$, 对于$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$中的一条路$(a\,|\alpha_1\cdots\alpha_m|\,b)$, 令$f_1(a\,|\alpha_1\cdots\alpha_m|\,b) = f(a\,|\alpha_1\cdots\alpha_m|\,b)(m)$. 显然

$$\begin{aligned}
&f_1(a\,|\alpha_1\cdots\alpha_m|\,b)\\
=&f(a\,|\alpha_1\cdots\alpha_m|\,b)(m)\\
=&f([[[\alpha_1,\alpha_2],\cdots],\alpha_m])(m)\\
=&[[[f(\alpha_1),f(\alpha_2)],\cdots],f(\alpha_m)](m)\\
=&[[[f(\alpha_1)(1),f(\alpha_2)(1)],\cdots],f(\alpha_m)(1)],
\end{aligned}$$

所以f_1线性扩张到$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$上是$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$到$\mathfrak{g}(K\varGamma)^+$的保次线性空间映射. 同理由$f^{-1}$得到$f_1^{-1}$是$\mathfrak{g}(K\varGamma)^+$到$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$的保次线性空间映射.

因为对任意道路$\alpha_1\cdots\alpha_n$,

$$f(\alpha_1\cdots\alpha_n) = f([[[\alpha_1,\alpha_2],\cdots],\alpha_n]) = [[[f(\alpha_1),f(\alpha_2)],\cdots],f(\alpha_n)],$$

$f(\alpha_i)$是长度大于等于1的道路的线性组合, 所以$f(\alpha_1\cdots\alpha_n)$是长度大于等于$n$的道路的线性组合, 所以$f(\mathfrak{g}(K\varDelta)^+(n)) \subseteq \mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n) \oplus \mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n+1) \oplus \cdots$. 同理$f^{-1}(\mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n)) \subseteq \mathfrak{g}(K\varDelta)^+(n) \oplus \mathfrak{g}(K\varDelta)^+(n+1) \oplus \cdots$. 对任意$\alpha_1\cdots\alpha_n \in \mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n)$, $f^{-1}f(\alpha_1\cdots\alpha_n) = \alpha_1\cdots\alpha_n$. 所以有$f_1^{-1}f_1(\alpha_1\cdots\alpha_n) = \alpha_1\cdots\ \alpha_n$. 可得$f_1^{-1}f_1 = 1_{\mathfrak{g}(K\varDelta)}, f_1f_1^{-1} = 1_{\mathfrak{g}(K\varGamma)}$. 所以$f_1$是从$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$到$\mathfrak{g}(K\varGamma)^+$的保次线性空间同构.

又因为$f(\mathfrak{g}(K\varDelta)^+(n)) \subseteq \mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n) \oplus \mathfrak{g}(K\varGamma)^+(n+1) \oplus \cdots$, 所以由

$$f([\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_n]) = [f(\alpha_1\cdots\alpha_m),f(\beta_1\cdots\beta_n)]$$

有$f([\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_n])(m+n) = [f(\alpha_1\cdots\alpha_m)(m),f(\beta_1\cdots\beta_n)(n)]$. 则

$$f_1([\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta_1\cdots\beta_n]) = [f_1(\alpha_1\cdots\alpha_m),f_1(\beta_1\cdots\beta_n)].$$

所以f_1是从$\mathfrak{g}(K\varDelta)^+$到$\mathfrak{g}(K\varGamma)^+$的保次路李代数同构.

定理4.5 如果有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\varDelta) \to \mathfrak{g}(K\varGamma)$, 则存在保次的李代数同构

$$f_1:\mathfrak{g}(K\varDelta) \to \mathfrak{g}(K\varGamma).$$

证　因为有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\Delta)\rightarrow\mathfrak{g}(K\Gamma)$, 所以由引理4.1知$f$限制在$\mathfrak{g}(K\Delta)^{+}$上有李代数同构$f:\mathfrak{g}(K\Delta)^{+}\rightarrow\mathfrak{g}(K\Gamma)^{+}$. 所以存在保次的李代数同构$f_1:\mathfrak{g}(K\Delta)^{+}\rightarrow\mathfrak{g}(K\Gamma)^{+}$. 对$\Delta$中任意顶点$a$, 令$f_1(a)=f(a)(0)$.

若箭向α与a不相连, 则$0=f([a,\alpha])=[f(a),f(\alpha)]$, 设

$$f(a)=\sum p_sc_s+\sum q_t\gamma_t, f(\alpha)=\sum m_i\alpha_i+\sum n_j\beta_j,$$

其中c_s是Γ的顶点, γ_t是Γ中长度≥ 1的道路, α_i 是Γ中长度为1的道路, β_j是Γ中长度≥ 2的道路.

$$0=[f(a),f(\alpha)]\ =\left[\sum p_sc_s,\sum m_i\alpha_i\right]+\left[\sum p_sc_s,\sum n_j\beta_j\right]+\left[\sum q_t\gamma_t,\sum m_i\alpha_i+\sum n_j\beta_j\right],$$

则有长度为1的道路$[\sum p_sc_s,\sum m_i\alpha_i]=0$. 而$f_1(a)=\sum p_sc_s, f_1(\alpha)=\sum m_i\alpha_i$, 所以

$$[f_1(a),f_1(\alpha)]=0.$$

若箭向α与a相连, 不妨设a是α的起点, 沿用上面的记号有

$$\begin{aligned}\sum m_i\alpha_i+\sum n_j\beta_j\ &=f(\alpha)=f([a,\alpha])\\ =[f(a),f(\alpha)]\ &=\left[\sum p_sc_s,\sum m_i\alpha_i\right]+\left[\sum p_sc_s,\sum n_j\beta_j\right]+\left[\sum q_t\gamma_t,\sum m_i\alpha_i+\sum n_j\beta_j\right],\end{aligned}$$

所以有$\sum m_i\alpha_i=[\sum p_sc_s,\sum m_i\alpha_i]$, 则$[f_1(a),f_1(\alpha)]=f_1(\alpha)$.

将α换成长度大于1的道路也有相同的结果. 显然对Δ中其他顶点b, 有

$$f_1([a,b])=0=[f_1(a),f_1(b)].$$

线性扩张后就得到f_1是从$\mathfrak{g}(K\Delta)$到$\mathfrak{g}(K\Gamma)$的保次李代数同构.

§5　由交替箭图构造的李代数的同构

定义5.1　若箭图Δ没有重边, 且没有长度大于等于2的道路, 即箭图的每个顶点都是源点或汇点, 则称Δ为交替箭图.

文[13]对A型交替箭图的表示进行了研究, 文[14] 对邓肯型交替箭图进行了讨论.

定理5.2　对两个交替箭图Δ,Γ, 李代数$\mathfrak{g}(K\Delta)\cong\mathfrak{g}(K\Gamma)$当且仅当$\Delta$与$\Gamma$有相同的顶点数与箭向数.

证　*必要性* 由推论4.2知Δ与Γ有相同的顶点数. 因为Δ,Γ没有长度大于等于2的道路, 所以由引理4.1知Δ与Γ有相同的箭向数.

充分性 设Δ的顶点为a_i, 箭向为α_j, Γ的顶点为a'_i, 箭向为α'_j. $(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$. 令$g:\mathfrak{g}(K\Delta)\rightarrow\mathfrak{g}(K\Gamma)$, 其中$g\left(\alpha_j\right)=\alpha'_j,(j=1,2,\cdots,n)$,

$$g\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g\left(a_1\right)\\g\left(a_2\right)\\\vdots\\g\left(a_m\right)\end{pmatrix}=A_{m,m}\begin{pmatrix}a'_1\\a'_2\\\vdots\\a'_m\end{pmatrix},$$ $A_{m,m}$是K上m阶方阵. 看是否存在$A_{m,m}$, 使得g为同构映射. 因为$g\left(\left[a_i,a_k\right]\right)=0=\left[g\left(a_j\right),g\left(a_k\right)\right],(i,k=1,2,\cdots,m), g\left(\left[\alpha_j,\alpha_l\right]\right)=0=\left[g\left(\alpha_j\right),g\left(\alpha_l\right)\right],(j,l=1,2,\cdots,n)$, 所以要使$g$为同构映射, 只需$g$为双射且

$$g\left(\left[a_i,\alpha_j\right]\right)=\left[g\left(a_i\right),g\left(\alpha_j\right)\right].(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n).$$

易知g为双射当且仅当$A_{m,m}$是可逆矩阵. 记

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\right] = \begin{pmatrix} [a_1,\alpha_1] & [a_1,\alpha_2] & \cdots & [a_1,\alpha_n] \\ [a_2,\alpha_1] & [a_2,\alpha_2] & \cdots & [a_2,\alpha_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_m,\alpha_1] & [a_m,\alpha_2] & \cdots & [a_m,\alpha_n] \end{pmatrix}.$$

不难发现

$$\left[A_{m,m}\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m{}' \end{pmatrix}, \quad (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n')\right] = A_{m,m}\left[\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}, (\alpha_1', \alpha_2, \cdots, \alpha_n')\right],$$

要使g成为同构映射, 则g要满足

$$g\left(\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\right]\right) = \left[g\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, g\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right)\right],$$

化简

$$\begin{aligned} g\left(\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\right]\right) &= \left[A_{m,m}\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}, (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n')\right] \\ &= A_{m,m}\left[\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}, (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n')\right], \end{aligned}$$

形式上令

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\right] = B_{m,n}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix}, (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n')\right] = C_{m,n}\begin{pmatrix} \alpha_1' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n' \end{pmatrix},$$

其中$B_{m,n},C_{m,n}$是K上的$m\times n$阶矩阵. 则上式变为

$$g\left(B_{m,n}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\right)=A_{m,m}C_{m,n}\begin{pmatrix}\alpha_1' & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n'\end{pmatrix}.$$

由g的线性性质知

$$\begin{aligned}g\left(B_{m,n}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\right)&=B_{m,n}\begin{pmatrix}g(\alpha_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & g(\alpha_n)\end{pmatrix}\\ &=B_{m,n}\begin{pmatrix}\alpha_1' & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n'\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

则有$B_{m,n}=A_{m,m}C_{m,n}$. 接下来考虑矩阵$B_{m,n},C_{m,n}$ 的秩.

若有$(x_1,x_2,\cdots,x_m)B_{m,n}=\overrightarrow{0}$, 则

$$(x_1,x_2,\cdots,x_m)B_{m,n}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\overrightarrow{0},$$

即

$$(x_1,x_2,\cdots,x_m)\begin{pmatrix}[a_1,\alpha_1] & [a_1,\alpha_2] & \cdots & [a_1,\alpha_n]\\ [a_2,\alpha_1] & [a_2,\alpha_2] & \cdots & [a_2,\alpha_n]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ [a_m,\alpha_1] & [a_m,\alpha_2] & \cdots & [a_m,\alpha_n]\end{pmatrix}=\overrightarrow{0}.$$

则

$$[x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m,\alpha_j]=0,(j=1,2,\cdots,n).$$

所以$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m\in C(\mathfrak{g}(K\Delta))$. 由定理3.1知$C(\mathfrak{g}(K\Delta))$的维数等于$\Delta$的连通分支的个数. 因为$\Delta$无定向圈且没有重边, 则其每个连通分支中顶点数比箭向数多1, 所以Δ的连通分支的个数=$|\Delta_0|$-$|\Delta_1|=m-n$. 所以$B_{m,n}$的秩$\geq m-\dim C(\mathfrak{g}(K\Delta))=m-(m-n)=n$, 所以$B_{m,n}$的秩等于$n$. 同理可知$C_{m,n}$的秩为$n$. 因为$B_{m,n}$与$C_{m,n}$是列满秩矩阵. 所以存在可逆矩阵$P_{m,m},Q_{m,m}$, 使得$B_{m,n}=P_{m,m}\begin{pmatrix}E_{n,n}\\ 0_{m-n,n}\end{pmatrix}$, $C_{m,n}=Q_{m,m}\begin{pmatrix}E_{n,n}\\ 0_{m-n,n}\end{pmatrix}$, 所以令$A_{m,m}=P_{m,m}Q_{m,m}^{-1}$, 则$B_{m,n}=A_{m,m}C_{m,n}$且$A_{m,m}$可逆, 则$g$是从$\mathfrak{g}(K\Delta)$到$\mathfrak{g}(K\Gamma)$的同构映射.

例5.3 考虑由以下两个箭图构成的李代数

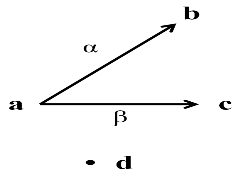

图 1 箭图Δ

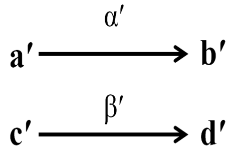

图 2 箭图Γ

因为它们有相同的顶点数与箭向数, 所以$\mathfrak{g}(K\Delta) \cong \mathfrak{g}(K\Gamma)$. 由上面证明过程, 计算得$B_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$C_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 则可求得

$$P_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{4\times 4} = P_{4\times 4}Q_{4\times 4}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以令

$$f : \mathfrak{g}(K\Delta) \to \mathfrak{g}(K\Gamma),$$

$$f(\alpha) = \alpha', f(\beta) = \beta', f(a) = 2a' + b' + c', f(b) = -a', f(c) = -2a' - 2b' - c', f(d) = c' + d',$$

将其线性扩张到$\mathfrak{g}(K\Delta)$ 上可得到从$\mathfrak{g}(K\Delta)$到$\mathfrak{g}(K\Gamma)$ 的同构.

参考文献:

[1] Assem I, Simson D, Skowroński A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, vol. 1: Techniques of Representation Theory[M]. LMSST 65, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] 刘绍学, 罗运纶, 肖杰. 路代数的同构[J]. 北京师范大学学报, 1986, 3: 13-20.

[3] 刘绍学. 有向图的几何性质和其路代数的代数性质[J]. 数学学报, 1988, 31(4): 483-487.

[4] 刘绍学. 路代数的张量积与有向图的直积[J]. 数学年刊A辑, 1992, 13(2): 153-160.

[5] 周伯荣. 有向图及其路代数[J]. 杭州大学学报, 1998, 17(4): 390-394.

[6] Liu Shaoxue. Isomorphism problem for tensor algebras over valued graphs[J]. Science in China Ser A, 1991, 34(3): 267-272.

[7] 肖杰. 路代数及其局部化的投射模[J]. 数学年刊A辑, 1991, 12: 144-148.

[8] Li Fang, Tan Dezhan. Graded Hochschild Cohomology of a path algebra with oriented cycles[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2014, 30(9): 1495-1512.

[9] 孙洪洲. 李代数李超代数及在物理中的应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999.

[10] Das Ashok, Okubo Susumu. Lie Groups and Lie Algebras for Physicists[M]. New Delhi: Hindustan Book Agency; Hackensack, NJ: World Scientific, 2014.

[11] 高凤霞, 韩红梅. 路李代数及其性质[J]. 曲阜师范大学学报, 2007, 33(4): 29-32.

[12] James E Humphreys. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory[M]. New York: Springer, 1972.

[13] Robert Bédard. Degenerations for the representations of an alternating quiver of type A[J]. Communications in Algebra, 1995, 23(9): 3269-3290.

[14] Zhu Bin. Generalized cluster complexes via quiver representations[J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2008, 27: 35-54.

The isomorphism of Lie algebras constructed by path algebras

YE Chang

(Faculty of Science, Huzhou Univ., Huzhou 313000, China)

Abstract: By the means of multiplication of path algebras, Lie algebras are constructed naturally. In this paper, firstly, the center of Lie algebras constructed by acyclic path algebras are given. Then it is proved that there is a degree preserving Lie algebras isomorphism if the isomorphism of Lie algebras constructed by two acyclic quivers exists. Finally, the necessary and sufficient condition for the isomorphism of Lie algebras constructed by two alternating quivers is that they have the same number of vertexes and arrows.

Keywords: path algebra; Lie algebra; isomorphism; alternating quiver

MR Subject Classification: 17B05; 05C25