高校应用数学学报
2023, 38(3): 347-354

一类非线性随机种群系统最优生育率控制

赵朝锋[1,*], 杜庆辉[2], 翟志波[3], 张永新[1], 曾 波[1]

(1. 洛阳师范学院 信息技术学院, 河南洛阳 471934;

2. 宁夏大学 数学与计算机学院, 宁夏银川 750021;

3. 河北工程大学 机械与装备工程学院, 河北邯郸 056038)

摘 要: 研究了一类非线性随机种群系统动力学模型的最优生育率控制问题. 在加入外部随机因素扰动下, 系统模型将会更具有实际意义. 针对随机种群系统生育率控制问题, 应用Itô公式, 相应的伴随方程和变分不等式等经典理论, 获得了随机种群系统最优生育率控制所满足的必要条件及其最优性组(由积分-偏微分方程和变分不等式组成). 文中得到的结论是确定性种群系统的扩展, 对随机控制理论具有现实的应用价值.

关键词: 随机种群系统; 必要条件; 最优生育率控制; 伴随方程

中图分类号: O175.14

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2023)03-0347-08

§1 引 言

生物种群系统的演变关乎生物的多样性, 以及生物系统的可持续发展. 构建由偏微分方程描述的种群系统可以很好地展示种群系统发展的动态特征, 利用有效控制策略可以使生物种群系统向着人们期望的方向发展. 本文基于文献[1-3]的确定性系统模型, 在考虑生物种群系统易受外界扰动影响时, 研究具年龄结构的生物种群系统的随机最优生育率控制问题.

随机扰动是一种带有普遍意义的物质运动形式, 是系统运动的特征之一. 一般的实际系统中, 随机扰动广泛存在, 如轮船在海面上遇到阵风, 各种电子装置中的噪声, 经济决策中的不可控因素等. 在自然界中, 生物种群系统经常也会受到随机扰动, 如飓风, 暴雨, 迁移, 地震等多突发性灾害因素等. 经过学者们的不懈努力, 发现把外界干扰因素考虑到生物种群系统更具有实际意义[4]. 因此, 针对生物种群随机系统[5-7], 本文考虑数学模型

$$\begin{cases} \frac{\partial p(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial p(r,t)}{\partial t}+\lambda(r,t)p(r,t)=f(r,t)+g(r,t)\frac{\partial \omega}{\partial t}, & (r,t)\in Q \\ p(r,0)=p_0(r), & Q_A=(0,A) \\ p(0,t)=\int_0^A\beta(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r, & Q_T=(0,T) \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2021-04-14　　修回日期: 2023-03-20

*通讯作者, Email: tufei210@126.com

基金项目: 河南省高校科技创新团队支持计划(22IRTSTHN016); 河南省教育厅高等学校重点科研项目(22A120009); 河南省科技厅重点研发与推广专项(222102210104; 232102320058); 河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2021024)

所描述的随机最优生育率控制的动力学系统(S), 其中$Q=(0,A)\times(0,T)(A,T\in(0,+\infty))$, A是种群个体最高存活年龄, r 是种群年龄变量, $0<r<A$, $t>0$ 是时间, $\lambda(r,t)$是平均死亡率, $\beta(r,t)$是种群生育率函数, $p(r,t)$是在t时刻年龄r 的种群密度, $f(r,t)$ 是年龄为r在时刻t的种群外部扰动(如迁移, 地震等多突发灾害所造成的种群变化等), $g(r,t)\frac{\partial\omega}{\partial t}$是外部因素对所研究系统的随机扰动($\omega(t)$ 是白噪声), $p_0(r)$是在时刻$t=0$时的种群密度的初始分布. 所以

$$p(r,t)=0,r\geq A.$$

其等价条件为

$$\lambda(\bullet,t)\in L_{\mathrm{loc}}[0,A],\lambda(r,t)\geq 0\ \text{a.e. } Q,$$
$$\int_0^A\lambda(r,t)\mathrm{d}r=+\infty,$$
$$\lambda(A,t)<+\infty.$$

同时假设$\forall s,t\in[0,T];a,r\in[0,A]$, 对于控制$\beta$满足

$$\begin{cases}\|\beta(0,0)\|^2\leq 0,\\ \|\beta(a,t)-\beta(r,s)\|^2\leq\gamma\|a-r\|+\alpha\|t-s\|.\end{cases}\tag{∇}$$

其中$\beta(r,t)$属于下面的允许控制集U_{ad}, 且$\alpha,\gamma>0$是常数.

在系统(1)中所描述的状态变量$p(r,t)$是依赖控制变量生育率函数$\beta(r,t)$的. 因此也把$p(r,t)$记为$p(r,t;\beta)$或简记为$p(\beta)$.

设$Z_d(r,t)\in L_2(Q)$是人们所期望系统(1)的密度函数能够到达的理想状态[1-2], 作者的目地是选取适当$\beta(r,t)$, 使得种群的年龄密度函数$p(r,t;\beta)$尽可能地逼近$Z_d(r,t)$, 又使得(r,t)尽可能的小.

引入性能指标泛函

$$J(\beta)=\|p(r,t;\beta)-Z_d(r,t)\|^2,\tag{2}$$

其中

$$\|p(r,t;\beta)-Z_d(r,t)\|^2=\int_Q|p(r,t;\beta)-Z_d(r,t)|^2\mathrm{d}Q,\ \mathrm{d}Q=\mathrm{d}r\mathrm{d}t.\tag{3}$$

种群系统(1)关于生育率的实际控制问题可以抽象为如下的数学问题[1-2].

寻求满足等式

$$J(\beta^*)=\inf_{\beta(r,t)\in U_{ad}}J(\beta(r,t)),\ \beta^*\in U_{ad},\tag{P}$$

其中

$$\begin{cases}U=L^2(Q);\\ U_{ad}=\text{U的非空闭凸子集}.\end{cases}\tag{4}$$

例如

$$U_{ad}=\{\beta(r,t)\mid\beta(r,t)\in L^2(Q),0\leq\beta(r,t)\leq\bar{\beta}(r,t)(\text{常数})\}\tag{5}$$

就是$L^2(Q)$的非空闭凸子集. 不失一般性, 后面的讨论始终假定U_{ad}是由(5)式所确定的. 满足问题(P)的$p(r,t)\in U_{ad}$称为系统(1)的最优边界控制或最优生育率控制, 方程组(1), 式(2)和式(P)就构成了非线性种群系统最优生育率控制问题的数学模型.

对于确定性系统的最优生育率控制已经有大量文献进行了研究. 如文献[1-2]讨论了确定性系统具有年龄特征和扩散特性时, 系统生育率控制的非线性问题. 文献[3]研究了具有年龄结构的竞争种群生育率最优控制问题. 文献[8-10]讨论了当$\lambda(r,t),\beta(r,t)$均与时间t无关时, 确定性系统平均生育率$\beta(t)$的控制问题, 得到了最优平均生育率$\beta^*(t)$存在的必要条件和时间最优控制的存

在性等结论. 文献[11-12]则讨论了确定性系统在$p(0,t)=\int_0^A\beta(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r+v(t)$时的边界控制问题, 其中$v(t)$为控制量, 得到了最优边界控制的存在性. 文献[13]讨论了确定性系统生育率分为竞争项与非竞争项时, 人口系统非竞争生育率的最优控制问题. 文献[14]讨论了具有年龄结构的周期种群系统的最优生育率控制的存在性. 但是, 上述文献很难反映在遭受到外部扰动情况下的生育率控制情况.

虽然对于存在外部随机因素扰动的系统已有研究, 如对随机种群系统的数值解[15-17], 解的稳定性[5,18]以及最优控制[6-7, 19-23]的研究. 文献[6]研究了随机种群系统带有分数布朗运动随机因素的情况下的最优控制问题, 得到了最优控制存在的充分必要条件; 文献[7]讨论了一类具有空间扩散的随机种群系统最优控制问题, 得到了控制的必要条件和最优性组. 但对随机种群系统的最优生育率控制却未曾见到. 文献[21]研究了一类具有反馈控制的随机最优控制问题, 得到了具有开环控制的确定性最优控制. 文献[23]对一个具有年龄依赖性和空间结构但出生率未知的人口动态模型进行了最优控制问题的研究. 利用Low-regret概念, 证明了通过局部分布控制使系统的状态达到期望的状态对的结论. 基于上述文献的资料，本文的工作是在确定性系统[1-3]的基础上, 考虑生物种群遭受了外界扰动情况下, 研究具有年龄结构的生物种群系统的随机最优生育率控制问题, 并最终得到了控制为最优的必要条件以及由积分-偏微分方程和变分不等式组成的最优性组[1-2, 7, 24]. 本文得到的结论是对文献[1-3]的扩展, 有效扩展了随机控制理论的实际应用范围.

§2 预备知识

令$V=H_1(Q)=\{z\mid z\in L^2,\ \frac{\partial z}{\partial x}\in L^2(Q)$, 其中$\frac{\partial z}{\partial x}$是广义函数意义下的偏导数[6]$\}$. V是Q的一阶Sobolev空间, 有

$$V\rightarrow H\equiv H_1\rightarrow V_1,$$

V_1和V的对偶空间, 分别用$\|\cdot\|$, $|\cdot|$ 和$\|\cdot\|_1$ 表示V, H, 和V_1 中的范数, $\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$V_1$和$V$的对偶积, $(\cdot,\cdot)$是H中的内积, 且存在常数k有

$$|x|\le k\|x\|,\forall x\in V.$$

设$C=C([0,T];H)$是从$[0,T]$到H连续的函数组成的空间, $\omega(t)$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上且取值于可分Hilbert空间K的Wiener过程, 且具有增量协方算子W, 用$\|G\|_2$表示Hilbert-Shmidt范数, 即$\|G\|_2^2=\mathrm{tr}(GWG^{\mathrm{T}})$.

同时假设各项参数满足如下条件[1].

(A_1) $\lambda\in C(Q\times\mathbf{R}^+)$, 非负可测函数, 且满足$0\le\lambda_0\le\lambda(r,t)<+\infty$.

(A_2) $\beta\in C(Q\times\mathbf{R}^+)$, 非负可测函数, 且满足$0\le\beta(r,t)\le\bar{\beta}<+\infty$.

(A_3) $u\in U_{ad}=U$的非空凸子集, 且$U=L^2(Q)$.

(A_4) 存在$k_1,k_2>0$, 使得

$$|f_1(r,t,P_1(t))-f_1(r,t,P_2(t))|\le k_1\|P_1-P_2\|_C,$$
$$|g_1(r,t,P_1(t))-g_1(r,t,P_2(t))|\le k_2\|P_1-P_2\|_C.$$

$f(t;u)$和$g(t;u)$是关于$\forall u,u_1\in L_H^2$的凸函数, 则任意$l\in(0,1)$ 有

$$f_1(lu+(1-l)u_1)\le lf_1(u)+(1-l)f_1(u_1),$$
$$g_1(lu+(1-l)u_1)\le lg_1(u)+(1-l)g_1(u_1).$$

§3 最优生育率控制

为了求解问题(P), 引入等价的指标泛函$\tilde{J}(p)$ [1]

$$\tilde{J}(p)=|p(r,t;\beta)-Z_d(r,t)|^2. \tag{6}$$

于是求解的问题(P)就等价于寻找满足等式

$$\tilde{J}(p^*)=\inf_{p\in U_{ad}}\tilde{J}(p),p^*(r,t)\in U_{ad}. \tag{7}$$

为了给出本文的主要结论, 令

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}p(\beta^*+l(\beta-\beta^*))|_{l=0}=\lim_{l\to 0}\frac{1}{l}[p(t;\beta^*+l(\beta-\beta^*))-p(t;\beta^*)],\quad \forall\beta(t),\beta^*(t)\in U_{ad}. \tag{8}$$

事实上, $\dot{p}$是非线性函数$p(\beta)$在β^*处沿方向$(\beta-\beta^*)$的G微分[6]. 记

$$\beta_\triangle(t)=\beta^*(t)+l(\beta-\beta^*)(t),\quad 0<l<1.$$

并且$(\beta_\triangle,p_\triangle)$和$(\beta^l,p^l)$分别表示问题中当$\beta=\beta_\triangle$与$\beta=\beta^l$时在$V$中的广义解, 因而有

$$\begin{cases}\frac{\partial p^l(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial p^l(r,t)}{\partial t}+\lambda(r,t)p^l(r,t)=f(r,t;\beta^l)+g(r,t;\beta^l)\frac{\partial\omega}{\partial t}, & (r,t)\in Q,\\ p^l(r,0)=p_0(r), & Q_A=(0,A),\\ p^l(0,t)=\int_0^A\beta^l(r,t)p^l(r,t)\mathrm{d}r, & Q_T=(0,T).\end{cases} \tag{9}$$

及

$$\begin{cases}\frac{\partial p_\triangle(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial p_\triangle(r,t)}{\partial t}+\lambda(r,t)p_\triangle(r,t)=f(r,t;\beta_\triangle)+g(r,t;\beta_\triangle)\frac{\partial\omega}{\partial t}, & (r,t)\in Q,\\ p_\triangle(r,0)=p_0(r), & Q_A=(0,A),\\ p_\triangle(0,t)=\int_0^A\beta_\triangle(r,t)p_\triangle(r,t)\mathrm{d}r, & Q_T=(0,T).\end{cases} \tag{10}$$

(9)和(10)做差, 并将所有方向两端同除以$l>0$, 令$l\to 0^+$取极限, 得

$$\begin{cases}\frac{\partial\dot{p}(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial\dot{p}(r,t)}{\partial t}+\lambda(r,t)\dot{p}(r,t) & \\ =[f(t,p^l;\beta^l)-f(t,p_\triangle;\beta_\triangle)]+[g(t,p^l;\beta^l)-g(t,p_\triangle;\beta_\triangle)]\frac{d\omega}{\mathrm{d}t}, & (r,t)\in Q,\\ \dot{p}(r,0)=0, & Q_A=(0,A),\\ \dot{p}(0,t)=\int_0^A\beta^*\dot{p}(r,t)\mathrm{d}r+\int_0^A(\beta-\beta^*)p(r,t)\mathrm{d}r, & Q_T=(0,T).\end{cases} \tag{11}$$

问题(11)的类型与问题(1)基本相似, 其解的存在唯一性由下面引理给出.

引理3.1 当假设(A1)~(A4)满足时, 系统(S)存在唯一解$p(r,t,\beta)\in U$.

证 具体证明可以利用文献[18]同样的方法, 在此不再展开.

为了求解问题(7), 需要完成以下工作.

引理3.2 序列$\{n\}$存在一个子序列$\{m\}$，对$\beta\in U$和任意$r\in[0,A],t\in[0,T]$, 有

$$\lim_{m\to\infty}\beta_m(r,t)=\beta(r,t). \tag{12}$$

证 令$\{t_1,t_2,\cdots\}$为$[0,T]$的稠密子集, $\{r_1,r_2,\cdots\}$为$[0,A]$的稠密子集.

序列$(\beta_n(r_1,t_1))_{n\in N}$是$U$中的有界序列, 则存在$(n)$的一个子序列$(m_k^{1,1})$和$F_1^1\in U$可得

$$\lim_{k\to\infty}\beta_{m_k^{1,1}}(r_1,t_1)=F_1^1.$$

再令序列$(\beta_n(r_1,t_2))_{n\in N}$是$U$中的有界序列, 则存在$(m_k^1)$ 的子序列$(m_k^{1,2})$和$F_2^1\in U$可得

$$\lim_{k\to\infty}\beta_{m_k^{1,2}}(r_1,t_2)=F_2^1.$$

假设对所有的$t_1,t_2,\cdots$有以上步骤, 则使得所有的$j\in N$有

$$\lim_{k\to\infty}\beta_{m_k^{1,j}}(r_1,t_j)=F_j^1.$$

同理, 对于序列$r_1, r_2, \cdots$重复上述过程, 能够得到用(m')代替$(m_k^{l,j})k \in N$, 则对$\forall i, j \in N$有

$$\lim_{m' \to \infty} \beta_{m'}(r_l, t_j) = \beta(r_l, t_j). \tag{13}$$

其中$\beta(r_l, t_j) = F_j^l$.

令$t \in [0, T] \backslash \{t_1, t_2, \cdots\}$, $r \in [0, A] \backslash \{r_1, r_2, \cdots\}$. 则有序列$(r_{lk})_{k \in N}, (t_{jk})_{l \in N}$ 使得

$$\lim_{k \to \infty} r_{lk} = r, \lim_{k \to \infty} t_{jk} = t.$$

因此得到

$$\begin{aligned} & \| \beta(r_{lk}, t_{jk}) - \beta(r_{lm}, t_{jm}) \|^2 \leq \liminf_{m' \to \infty} \| \beta_{m'}(r_{lk}, t_{jk}) - \beta_{m'}(r_{lm}, t_{jm}) \|^2 \\ \leq \quad & \gamma \| r_{lk} - r_{lm}) \|^2 + \alpha \| t_{jk} - t_{jm} \|^2, \end{aligned}$$

所以有

$$\beta(r, t) = \lim_{k \to \infty} \beta(r_{lk}, t_{jk}). \tag{14}$$

假设对$\forall \varepsilon > 0$有$k \in N$和$m_k^{'} \in N$使得$\forall m^{'} \geq m_k^{'}$成立

$$\begin{aligned} & \| \beta(r, t) - \beta_{m'}(r, t) \| \\ \leq \quad & \| \beta(r, t) - \beta(r_{lk}, t_{jk}) \| + \| \beta(r_{lk}, t_{jk}) - \beta(r_{lm}, t_{jm}) \| + \| \beta_{m'}(r_{lk}, t_{jk}) - \beta_{m'}(r, t) \| \\ \leq \quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故可得到

$$\lim_{m' \to \infty} \beta_{m'}(r, t) = \beta(r, t). \tag{15}$$

结合(∇)和(15)式可得到

$$\| \beta(r, t) - \beta(a, s) \|^2 \leq \liminf_{m' \to \infty} \| \beta_{m'}(r, t) - \beta_{m'}(a, s) \|^2 \leq \gamma \| r - a \|^2 + \alpha \| t - s \|^2 .$$

所以结论$\lim_{m \to \infty} \beta_m(r, t) = \beta(r, t)$成立.

定理3.1 当$0 < T < \infty$时, 若$\beta^*(r, t)$是系统(1)的最优生育率控制, 则存在下列不等式成立

$$E \int_Q \dot{p}(r, t; \beta^*)[p(r, t; \beta^*) - Z_d(r, t)] \mathrm{d}r\mathrm{d}t \geq 0, \quad \forall \beta(t) \in U. \tag{16}$$

证 由U_{ad}的凸性可知, 从极小化序列的$\{\beta_n\}$中取的$\beta \in U_{ad}$和$0 < l < 1$有

$$\beta_\triangle(r, t) = \beta^*(r, t) + l(\beta_n - \beta^*)(r, t) = l\beta_n(r, t) + (1 - l)\beta^*(r, t), \quad \beta^*(r, t) \in U_{ad}. \tag{17}$$

因此有

$$J(\beta_\triangle) - J(\beta^*) \geq 0. \tag{18}$$

另外有

$$\|\beta_\triangle\| - \|\beta^*\| \leq \|\beta_\triangle - \beta^*\| = l\|\beta^* - \beta_n\|. \tag{19}$$

因而

$$\lim_{l \to 0^+} \frac{1}{l}(\|\beta_\triangle\| - \|\beta^*\|) \leq \|\beta^* - \beta_n\|, \quad \forall \beta_n \in U_{ad}.$$

$$\begin{aligned} & J(\beta_\triangle) - J(\beta^*) = E \int_Q |p(\beta_\triangle) - Z_d(r, t)|^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}t - E \int_Q |p(\beta^*) - Z_d(r, t)|^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}t \\ = \quad & E \int_Q [p(\beta_\triangle) - p(\beta^*)][p(\beta_\triangle) + p(\beta^*) - 2Z_d(r, t)] \mathrm{d}r\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{20}$$

上式(20)两端同除以$l>0$, $l\to 0^+$取极限, 且由$\dot{p}$得

$$\begin{aligned}&\lim_{l\to 0^+}\frac{1}{l}E\int_Q[p(\beta_\triangle)-p(\beta^*)][p(\beta_\triangle)+p(\beta^*)-2Z_d(r,t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\ =\ & E\int_Q 2\dot{p}(r,t;\beta^*)[p(r,t;\beta^*)-Z_d(r,t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t\geq 0.\end{aligned}\tag{21}$$

由此可见式(16)成立.

定理3.1给出了$\beta^*(r,t)$为最优生育率控制的必要条件, 即$\beta^*(r,t)$满足式(16). 为了给出最优性组[1-2, 6], 系统(1)的伴随状态$q(r,t;\beta^*)$ 有如下形式:

$$\begin{cases}-\frac{\partial q}{\partial r}-\frac{\partial q}{\partial t}+\lambda(r,t)q-kd\omega\mathrm{d}t=0,\\ q(r,t)=p(r,t;\beta^*)-Z_d(r,t)q(r,T)=0, & r\in[0,A],\\ q(A,t)=0, & t\in[0,T].\end{cases}\tag{22}$$

设$q(r,t;\beta^*)$是由(22)确定的, 用$q(r,t)$乘以式(1)应用Itô 公式以及分部积分公式, 得

$$\begin{aligned}&\langle-\frac{\partial q}{\partial r}-\frac{\partial q}{\partial t}+\lambda(r,t)q,p(r,t;\beta^*)\rangle+\int_Q\dot{p}(r,t;\beta^*)[p(r,t;\beta^*)-Z_d(r,t)]\mathrm{d}r\\ -\ &\int_Q[(f(t,p^l;\beta^l)-f(t,p_\triangle;\beta_\triangle))-(g(t,p^l;\beta^l)-g(t,p_\triangle;\beta_\triangle))]\frac{d\omega}{\mathrm{d}t}q(r,t;\beta^*)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\ =\ &\langle kd\omega,p(r,t;\beta^*)\rangle+\int_Q\dot{p}(r,t;\beta^*)[p(r,t;\beta^*)-Z_d(r,t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\ -\ &\int_Q(f(t,p^l;\beta^l)-f(t,p_\triangle;\beta_\triangle))q(r,t;\beta^*)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\ -\ &\int_Q(g(t,p^l;\beta^l)-g(t,p_\triangle;\beta_\triangle))\frac{d\omega}{\mathrm{d}t}q(r,t;\beta^*)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\ =\ &0.\end{aligned}\tag{23}$$

其中$k(t)$是参数.

两边同时求期望

$$E\int_Q(f(t,p^l;\beta^l)-f(t,p_\triangle;\beta_\triangle))q(t)+K(t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t=E\int_Q\dot{p}(r,t;\beta^*)[p(r,t;\beta^*)-Z_d(r,t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t.\tag{24}$$

其中$K(t)$是参数.

于是有

$$E\int_Q(f(t,p^l;\beta^l)-f(t,p_\triangle;\beta_\triangle))q(t)+K(t)]\mathrm{d}r\mathrm{d}t\geq 0,\quad \forall\beta\in U_{ad}.$$

定理3.2 设系统状态$p(r,t;\beta)$是系统(1)确定的相应的性能指标泛函$J(\beta)$由(1)给出, 若β^*是系统(1)的最优生育率控制, 则存在三元组(p,q,β), 它们满足方程组:

$$\begin{cases}\frac{\partial p(r,t;\beta^*)}{\partial r}+\frac{\partial p(r,t;\beta^*)}{\partial t}+\lambda(r,t)p(r,t;\beta^*)=f(r,t;\beta^*)+g(r,t;\beta^*)\frac{\partial\omega}{\partial t},\\ -\frac{\partial q}{\partial r}-\frac{\partial q}{\partial t}+\lambda(r,t)q+kd\omega\mathrm{d}t=0,\\ p(r,0)=p_0(r),q(r,T)=0, & r\in[0,A],\\ p(0,t)=\int_0^A\beta(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r,q(A,t)=0, & t\in[0,T].\end{cases}\tag{25}$$

及变分不等式

$$\begin{cases} E\int_Q (f(t,p^l;\beta^l) - f(t,p_\triangle;\beta_\triangle))q(t) + K(t)]\mathrm{d}t \geq 0, \\ \beta(r,t) \in U_{ad}. \end{cases} \tag{26}$$

则定理给出了系统(1)由变分不等式构成的最优性组, 即(25)-(26).

§4 结 论

本文研究了一类与年龄有关的非线性随机种群系统的生育率最优控制问题, 证明得到了随机种群系统存在最优控制的必要条件. 研究发现, 由于种群系统受到外部随机因素的影响, 把随机扰动考虑在模型中显然更加符合实际情况. 本文将白噪声引入非线性种群系统, 同时还考虑了年龄因素对生物个体的影响, 更加真实准确地反映了生物体的生存状态, 因此研究该系统具有一定的现实意义.

参考文献:

[1] 李健全, 陈任昭. 年龄相关的种群系统的最优生育率控制控制[J]. 生物数学学报, 2006, 21(2): 191-203.

[2] 李健全, 陈任昭. 时变种群扩散系统最优生育率控制的非线性问题[J]. 应用数学学报, 2002, 04: 52-67.

[3] Wang Zhanping. Optimal birth control of two competing species with age-structure[J]. Math Appl, 2017, 30(2): 291-298.

[4] Mao Xuerong, Marion G, Renshaw E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. Stoch Proc Appl, 2002, 97(1): 95-110.

[5] Zhang Mengqing, Zhang Qimin, Tian Jing, Li Xining. The asymptotic stability of numerical analysis for stochastic age-dependent cooperative Lotka-Volterra system[J]. Math Biosci Eng, 2021, 18(2): 1425-1449.

[6] Zhao Chaofeng, Zhai Zhibo, Du Qinghui. Optimal control of stochastic system with Fractional Brownian Motion[J]. Math Biosci Eng, 2021, 18(5): 5625-5634.

[7] 戴晓娟, 张启敏. 非线性随机种群系统的最优控制[J]. 昆明理工大学学报(自然科学版), 2009, 34(003): 100-104.

[8] Chan W L, Guo Baozhu. Optimal birth control of population dynamics[J]. J Math Anal Appl, 1989, 144(2): 532-552.

[9] Chan W L, Guo Baozhu. Optimal birth control of population dynamics. II. problems with free final time, phase constriants and mini-max costs[J]. J Math Anal Appl, 1990, 146(2): 523-539.

[10] 赵友. 时变人口系统最优生育率控制存在性的必要条件[J]. 东北大学学报, 1994, 15: 1-5.

[11] 曹春玲, 陈任昭. 时变种群系统的最优边界控制[J]. 东北师范大学学报(自然科学版), 1999, 31(4): 9-13.

[12] 徐文兵, 陈任昭. 时变种群系统的最终状态观测及边界控制[J]. 东北师范大学学报(自然科学版), 2000, 32(1): 6-9.

[13] 蔡吉花, 王辉, 石强银. 时变人口发展系统非竞争人口生育率的最优控制[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(9): 265-270.

[14] 付军, 霍云霄, 吴秀兰. 具年龄结构的周期种群系统的最优生育率控制[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2018，39(1): 54-60.

[15] Zhang Qimin, Han Chongzhao. Numerical analysis for stochastic age-structured population equations[J]. Appl Math Comput, 2005, 176: 210-223.

[16] Zhang Qimin, Han Chongzhao. Convergence of numerical solutions to stochastic age-structured population system with diffusion[J]. Appl Math Comput, 2006, 186: 1234-1242.

[17] Ma Weijun, Zhang Qimin, Han Chongzhao. Numerical analysis for stochastic age-dependent population equations with fractional Brownian motion[J]. Commun Nonlinear Sci Num Simul, 2012, 17(4): 1884-1893.

[18] Pei Yongzhen, Yang Hongfu, Zhang Qimin, Shen Fangfang. Asymptotic mean-square boundedness of the numerical solutions of stochastic age-dependent population equations with Poisson jumps[J]. Appl Math Comput, 2018, 320: 524-534.

[19] 王昆仑, 赵朝锋, 张启敏. 一类非线性随机年龄种群收获系统的数值解[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2015, 38(6): 83-87.

[20] He Zerong, Ni Dongdong, Wang Shuping. Optimal harvesting of a hierarchical age-structured population system[J]. Int J Biomath, 2019, 12(8): 1950091.

[21] Stefana L A. A stochastic optimal control problem with feedback input[J]. Int J Control, 2022, 95(3): 589-602.

[22] Liu Peijiang, Din Anwarud, Huang Lifang, Abdullahi Y. Stochastic optimal control analysis for the hepatitis B epidemic model[J]. Results Phys, 2021, 26(2): 104372.

[23] Kenne C, Leugering G, Mophou G. Optimal control of a population dynamics model with missing birth rate[J]. SIAM J Control Optim, 2020, 58(3): 1289-1313.

[24] 付军, 朱宏. 具年龄和加权的半线性种群系统的最优边界控制[J]. 吉林大学学报(理学版), 2013, 51(1): 27-33.

An optimal birth rate control problem for nonlinear stochastic population dynamic system

ZHAO Chao-feng[1], DU Qing-hui[2], ZHAI Zhi-bo[3], ZHANG Yong-xin[1], ZENG Bo[1]

(1. School Inf. Technol., Luoyang Normal Univ., Luoyang 471022, China;

2. School Math. Stat., Ningxia Univ., Yinchuan 750021, China;

3. Coll. Mech. Eq. Eng., Hebei Univ. Eng., Handan 056038, China)

Abstract: An optimal birth rate control problem for the nonlinear stochastic population dynamic system is studied. When the external environment impact on the system, the system model would have practical significance. In order to solve the optimal birth rate control problem of the stochastic population system, Itǒ formula, the adjoint equation and variational inequality will be used to get the necessary condition for the optimization and its optimality system (integral-partial differential equation and variational inequality) are obtained, which extends a result in the deterministic population system, and has practical application to stochastic control theory.

Keywords: nonlinear stochastic population dynamic system; necessary condition; optimal birth rate control; adjoint equation

MR Subject Classification: 35A25; 93B05