

向量优化中基于改进集下真有效解的非线性标量化

白霞, 李飞

(内蒙古大学 数学科学学院, 内蒙古呼和浩特 010021)

摘要: 利用基于改进集 E 的Gerstewitz泛函 $\varphi_{q,E}$ 及定向距离函数 Δ_{-E} 等两类非线性标量化函数对向量优化问题的 E -Benson真有效解和广义 E -Benson真有效解进行刻画, 并给出相应例子对部分结论进行说明.

关键词: 向量优化; 改进集; 真有效解; 非线性标量化

中图分类号: O221.6

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2022)04-0475-09

§1 引言

近似解在最优化理论和应用中一直占有重要地位. 自1979年文献[1]中首次提出向量优化问题近似解概念以来, 各种近似解理论已获得大量的成果. 向量优化问题的有效解集通常可能会包含某些异常类型的解, 因此需要提出各种真有效解来强化有效解集. 到目前为止已提出很多真有效解概念, 常见的真有效解包括Geoffrion真有效解^[2], Benson真有效解^[3], Borwein真有效解^[4], Henig真有效解^[5]等等. 文献[6]中引入了改进集并利用改进集提出了 E -有效解的概念. 近年来, 在向量优化中有很多关于改进集的研究, 这方面详细成果可见文献[7-12]. 文献[13]中利用改进集引入了一种新的真有效解, 称之为 E -Benson真有效解, 它统一了某些真有效解和近似真有效解. 文献[13]中同时得到了关于 E -Benson真有效解的线性标量化的一些刻画. 文献[14]和文献[15]分别利用Gerstewitz泛函和基于锥 K 上的定向距离函数 Δ_{-K} 对 E -Benson真有效解进行非线性标量化刻画. 文献[16]中利用回收锥引进了一种新的真有效解, 称之为广义 E -Benson真有效解, 并利用择一定理建立广义 E -Benson真有效解的线性标量化定理. 文献[17]中利用Gerstewitz泛函和基于锥 K 上的定向距离函数 Δ_{-K} 等两类非线性标量化函数及其相应非凸分离定理给出广义 E -Benson真有效解的一些非线性标量化性质. 受文献[14-17]启发, 本文通过基于改进集 E 的Gerstewitz泛函 $\varphi_{q,E}$ 及定向距离函数 Δ_{-E} 分别建立了 E -Benson真有效解和广义 E -Benson真有效解的非线性标量化结果. 同时文中还举例说明了部分结果.

§2 预备知识

设 X 是线性空间, Y 是拓扑线性空间, A 是 Y 中非空子集. $Y \setminus A$, $\text{int}A$, $\text{cl}A$, $\text{bd}A$ 分别表示集合 A 的补集, 内部, 闭包和边界. 若 $\forall a^1, a^2 \in A, \lambda \in [0, 1]$, 有 $\lambda a^1 + (1 - \lambda)a^2 \in A$, 则称 A 是凸集. 若集合 A 满足 $\lambda A \subseteq A, \lambda \geq 0$, 则称集合 A 是锥. 若锥 A 满足 $A + A \subseteq A$, 则称锥 A 是凸锥. $A_\infty := \{u \in Y : a + tu \in A, \forall a \in A, \forall t \in \mathbf{R}_+\}$ 表示集合 A 的回收锥. $\mathbf{0}$ 表示空间中的零向量. $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{R}^p$ 表示 p 维欧式空间, $\mathbf{R}_+^p = \{x \in \mathbf{R}^p : x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p\}$, $\mathbf{R}_{++}^p = \{x \in \mathbf{R}^p : x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T, x_i > 0, i = 1, 2, \dots, p\}$. 设 $\varphi : Y \rightarrow \mathbf{R}$. 其有效域为 $\text{dom}\varphi := \{y \in Y : \varphi(y) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}\}$. 设 $t \in \mathbf{R}$, 若 $\forall x^1, x^2 \in A, \lambda \in (0, 1)$, 有 $\varphi(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda\varphi(x^1) + (1 - \lambda)\varphi(x^2)$, 则称 φ 在 A 上是凸的. 若 $\forall x \in A, \lambda \geq 0$, 有 $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, 则称 φ 在 A 上是正齐次的. 若 $\forall x^1, x^2 \in A$, 有 $\varphi(x^1 + x^2) \leq \varphi(x^1) + \varphi(x^2)$, 则称 φ 在 A 上是次可加的.

设 K 是 Y 中内部非空的闭凸点锥, $x, y \in Y$, 则由集合 K 定义的向量的序关系为

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

本文考虑向量优化问题

$$\begin{aligned} (\text{VP}) \quad & \min f(x), \\ & \text{s.t. } x \in S, \end{aligned}$$

其中 $f : X \rightarrow Y, \emptyset \neq S \subset X$.

定义2.1(见[6]) 设 E 是 Y 中非空集合, $\mathbf{0} \notin E$ 且 $E + K = E$, 则称 E 是关于 K 的改进集.

定义2.2(见[13]) 设 E 是关于 K 的改进集. 若 $\bar{x} \in S$, 满足

$$\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K) = \{\mathbf{0}\},$$

则称 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E -Benson真有效解, 记为 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$.

定义2.3(见[16]) 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集. 若 $\bar{x} \in S$, 满足

$$\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-E_\infty) = \{\mathbf{0}\},$$

则称 $\bar{x}$ 是问题(VP)的广义 E -Benson真有效解, 记为 $\bar{x} \in O_{BS}^{E_\infty}(f, S)$.

给定数值优化问题

$$(\text{P}) \quad \min_{x \in Z} \phi(x),$$

其中 $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}, \emptyset \neq Z \subset X$.

设 $\varepsilon \geq 0, \bar{x} \in Z$. 若 $\phi(x) \geq \phi(\bar{x}) - \varepsilon, \forall x \in Z$, 则 $\bar{x}$ 称为问题(P)的 ε -近似解. 问题(P)的全体 ε -近似解构成的集合记为 $AMin(\phi, \varepsilon)$. 若 $\phi(x) > \phi(\bar{x}) - \varepsilon, \forall x \in Z$, 则 $\bar{x}$ 称为问题(P)的严格 ε -近似解. 问题(P)的全体严格 ε -近似解构成的集合记为 $SAMin(\phi, \varepsilon)$.

非线性标量化函数Gerstewitz泛函 $\varphi_{q,G} : Y \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 定义为

$$\varphi_{q,G}(y) = \inf\{s \in \mathbf{R} \mid y \in sq - G\}, y \in Y, q \in \text{int}G,$$

其中 $\inf \emptyset = +\infty$.

当Gerstewitz泛函 $\varphi_{q,G}$ 中 G 是一般集合时, 其主要性质包括非线性分离性质见文献[18]. 在向量优化很多应用中通常集合 G 取为闭凸锥 K . 赵克全等人在文献[14]中及本文中均将集合 G 取为改进集 E .

引理2.1 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集且满足 $E + (0, \infty)q \subset \text{int} E$, $q \in \text{int} E$, 则函数 $\varphi_{q,E}$ 是连续的且满足

$$\begin{aligned}\{y \in Y \mid \varphi_{q,E}(y) < c\} &= cq - \text{int} E, \forall c \in \mathbf{R}, \\ \{y \in Y \mid \varphi_{q,E}(y) \leq c\} &= cq - \text{cl} E, \forall c \in \mathbf{R}, \\ \{y \in Y \mid \varphi_{q,E}(y) = c\} &= cq - \text{bd} E, \forall c \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

证 根据文献[18]中定理2.3.1, 可得结论成立.

Zaffaroni在文献[19]中提出了另一个非线性标量化函数即定向距离函数.

设 A 是赋范线性空间 Y 中的集合, $\Delta_A(y) : Y \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 定义为

$$\Delta_A(y) = d_A(y) - d_{Y \setminus A}(y),$$

其中 $d_{\emptyset}(y) = +\infty$, $d_A(y) = \inf_{z \in A} \|z - y\|$.

Δ_A 函数的很多良好性质可参考文献[19]. 本文基于改进集 E 的 Δ_E 函数性质如下.

引理2.2(见[20]) 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集且非空, 则

- (1) Δ_E 是实值且是1-Lipschitz的;
- (2) $\text{cl} E = \{y \in Y : \Delta_E(y) \leq 0\}$, $\text{bd} E = \{y \in Y : \Delta_E(y) = 0\}$, $Y \setminus E = \{y \in Y : \Delta_E(y) \geq 0\}$, $\text{int} E = \{y \in Y : \Delta_E(y) < 0\}$;
- (3) 若 E 是凸的, 则 Δ_E 是凸的;
- (4) 若 E 是锥, 则 Δ_E 是正齐次的.

注2.1 据文献[21]中引理3.3知, 若 E 是 Y 中关于 K 的改进集且 $E \subset K$, 则 E 是co-radiant集. 再由其定理3.1可得, 若 E 是凸的则 Δ_E 是次可加的.

§3 Gerstewitz泛函 $\varphi_{q,E}$ 关于真有效解的非线性标量化

考虑数值优化问题

$$(P_{q,y}) \quad \min_{x \in S} \varphi_{q,E}(f(x) - y),$$

其中 $y \in Y$, $q \in \text{int} E$. 函数 $\varphi_{q,E}(f(x) - y)$ 记为 $(\varphi_{q,E,y} \circ f)(x)$, 问题 $(P_{q,y})$ 的 ε -近似解全体所构成集合记为 $AMin(\varphi_{q,E,y} \circ f, \varepsilon)$, 严格 ε -近似解全体所构成集合记为 $SAMin(\varphi_{q,E,y} \circ f, \varepsilon)$.

定理3.1 设 E 是 Y 中关于 K 的闭改进集, $q \in \text{int}(E \setminus K)$, $\varepsilon = \inf\{s \in \mathbf{R}_{++} \mid sq \in \text{int}(E \setminus K)\}$, 则 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S) \implies \bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$.

证 由 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$ 可得 $\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K) = \{\mathbf{0}\}$, 则 $\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-\text{int} K) = \emptyset$, 从而

$$(f(x) + E - f(\bar{x})) \cap (-\text{int} K) = \emptyset, \forall x \in S. \quad (1)$$

下面证明

$$(f(\bar{x}) - \text{int}E) \cap f(S) = \emptyset. \quad (2)$$

假设不成立, 则存在 $\hat{x} \in S$ 使得 $f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in -\text{int}E$. 因为 $E + \text{int}K = \text{int}E$, 故有 $f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in -E - \text{int}K$, 即 $f(\hat{x}) - f(\bar{x}) + E \in -\text{int}K$, 这与(1)式矛盾, 故(2)式成立. 根据引理2.1可得 $\{y \in Y \mid \varphi_{q,E}(y) < 0\} = -\text{int}E$, 故 $\{y \in Y \mid \varphi_{q,E}(y) < 0\} \cap (f(S) - f(\bar{x})) = \emptyset$, 即

$$\varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) \geq 0, \forall x \in S. \quad (3)$$

而

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) &= \varphi_{q,E}(\mathbf{0}) \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid sq \in E\} \\ &\leq \inf\{s \in \mathbf{R}_{++} \mid sq \in \text{int}(E \setminus K)\} = \varepsilon, \end{aligned}$$

根据(3)式得到, $\varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) \geq \varphi_{q,E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - \varepsilon$. 因此 $\bar{x} \in \text{AMin}(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$.

下面的例子表明本文取 $q \in \text{int}(E \setminus K)$ 是合理的, 同时对定理3.1进行说明.

例3.1 令 $X = Y = \mathbf{R}^2$, $K = \mathbf{R}_+^2$, $f(x) = x$, 且

$$\begin{aligned} E &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geq 1, x_2 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \mid \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 0\}, \\ S &= \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}\}. \end{aligned}$$

显然 K 是一个闭凸锥, E 是关于 K 的闭改进集且 $\text{int}(E \setminus K) \neq \emptyset$. 令 $\bar{x} = (0, 0) \in S$, $q = (-\frac{3}{2}, 3) \in \text{int}(E \setminus K)$, 则 $\varepsilon = \frac{2}{3}$. 因为

$$\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K) = \{\mathbf{0}\},$$

故 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$. 而

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) &= \varphi_{q,E}(\mathbf{0}) \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid \mathbf{0} \in sq - E\} \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid sq \in E\} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

对任意 $x \in S$, 有

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) &= \varphi_{q,E}(f(x)) \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid f(x) \in sq - E\} \\ &\geq 0 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \varphi_{q,E}(\mathbf{0}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$.

下面的例子表明定理3.1的逆不一定成立.

例3.2 令 $X = Y = \mathbf{R}^2$, $K = \mathbf{R}_+^2$, $f(x) = x$, 且

$$\begin{aligned} E &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geq 1, x_2 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \mid \frac{5}{3}x_1 + x_2 \geq 0\}, \\ S &= \{(x_1, x_2) \mid -3 \leq x_1 \leq 0, x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

显然 K 是一个闭凸锥, E 是关于 K 的闭改进集且 $\text{int}(E \setminus K) \neq \emptyset$. 令 $\bar{x} = (0, 0) \in S$, $q = (-1, 4) \in \text{int}(E \setminus K)$, 则 $\varepsilon = \frac{1}{3}$. 因为

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) &= \varphi_{q,E}(\mathbf{0}) \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid \mathbf{0} \in sq - E\} \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid sq \in E\} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

对任意 $x \in S$, 有

$$\begin{aligned} \varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) &= \varphi_{q,E}(f(x)) \\ &= \inf\{s \in \mathbf{R} \mid f(x) \in sq - E\} \\ &\geq 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \varphi_{q,E}(\mathbf{0}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\bar{x} \in AMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$. 但是

$$\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K) \neq \{\mathbf{0}\},$$

因此 $\bar{x} \notin O_{BS}^E(f, S)$.

定理3.2 设 E 是 Y 中关于 K 的闭改进集, 且 $\text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$ 是闭集, $q \in \text{int}(E \setminus K)$, $\varepsilon = \varphi_{q,E}(\mathbf{0})$, 则 $\bar{x} \in SAMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon) \implies \bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$.

证 假设 $\bar{x} \in SAMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$, 且 $\bar{x} \notin O_{BS}^E(f, S)$, 则存在 $\mathbf{0} \neq d \in -K$ 使得 $d \in \text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$. 因为 $\text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$ 是闭集, 故 $d \in \text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$, 从而存在 $\lambda > 0, x \in S, e \in E$, 有 $d = \lambda(f(x) + e - f(\bar{x})) \in -K$. 因为 K 是锥, 故 $f(x) + e - f(\bar{x}) \in -K$. 根据 $E = E + K$ 可得, $f(x) - f(\bar{x}) \in -e - K \subset -E - K = -E$. 根据引理2.1且 E 是闭集可得, $\{y \in Y \mid \varphi_{q,E}(y) \leq 0\} = -\text{cl}E = -E$, 故

$$\varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) \leq 0. \quad (4)$$

因为 $\bar{x} \in SAMin(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$, 则

$$\varphi_{q,E}(f(x) - f(\bar{x})) > \varphi_{q,E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - \varepsilon = \varphi_{q,E}(\mathbf{0}) - \varepsilon = 0,$$

与(4)式矛盾, 故 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$.

注3.1 文献[8, 14]中定义函数 $\varphi_{q,E}$ 时将 q 取值于锥 K 中, 在证明集合 $\text{int}(E \cap K) \neq \emptyset$ 后, 分别对 E -有效解与 E -Benson真有效解标量化刻画时取定 $q \in \text{int}(E \cap K)$. 而本文在定义函数 $\varphi_{q,E}$ 时将 q 取值于改进集 E 中, 对 E -Benson真有效解标量化刻画时取定 $q \in \text{int}(E \setminus K)$, 故在函数 $\varphi_{q,E}$ 中 q 的取值不再依赖于锥 K .

利用Gerstewitz泛函 $\varphi_{q,E}$ 还可以对广义 E -Benson真有效解进行非线性标量化刻画, 得到下面推论3.1和推论3.2. 证明过程与定理3.1, 定理3.2相似, 这里省略.

推论3.1 设 E 是 Y 中关于 K 的闭改进集, $q \in \text{int}(E \setminus K)$, $\varepsilon = \inf\{s \in \mathbf{R}_{++} \mid sq \in \text{int}(E \setminus K)\}$, 则 $\bar{x} \in O_{BS}^{E\infty}(f, S) \implies \bar{x} \in \text{AMin}(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon)$.

推论3.2 设 E 是 Y 中关于 K 的闭改进集, 且 $\text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$ 是闭集, $q \in \text{int}(E \setminus K)$, $\varepsilon = \varphi_{q,E}(\mathbf{0})$, 则 $\bar{x} \in \text{SAMin}(\varphi_{q,E,f(\bar{x})} \circ f, \varepsilon) \implies \bar{x} \in O_{BS}^{E\infty}(f, S)$.

§4 定向距离函数 Δ_{-E} 关于真有效解的非线性标量化

本节利用基于改进集 E 的非线性标量化函数 Δ_{-E} 给出向量优化问题(VP) 的 E -Benson真有效解的非线性标量化定理. 本文是把 Δ 函数定义在比锥更一般的集合即改进集 E 上而进行的非线性标量化刻画, 这与文献[15]将其定义在锥 K 上不同. 本节中始终假设 Y 是赋范线性空间.

考虑数值优化问题

$$(P_y) \quad \min_{x \in S} \Delta_{-E}(f(x) - y),$$

其中 $y \in Y$. 问题 (P_y) 的 ε -近似解全体所构成集合记为 $\text{AMin}(\Delta_{-E}(f(x) - y), \varepsilon)$, 严格 ε -近似解全体所构成集合记为 $\text{SAMin}(\Delta_{-E}(f(x) - y), \varepsilon)$.

定理4.1 设 E 是 Y 中关于 K 的闭凸改进集且 $E \subset K$, $\beta = \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e)$, 则

$$\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S) \implies \bar{x} \in \text{AMin}(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), 2\beta).$$

证 由 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$ 可得 $\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K) = \{\mathbf{0}\}$, 则 $\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset$, 从而 $(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K \setminus \{\mathbf{0}\}) = \emptyset$, 故 $f(x) + e - f(\bar{x}) \notin -K \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall x \in S, e \in E$. 因为 $E \subset K$, 故 $f(x) + e - f(\bar{x}) \notin -E$, 从而

$$\begin{aligned} \Delta_{-E}(f(x) + e - f(\bar{x})) &= d_{-E}(f(x) + e - f(\bar{x})) - d_{Y \setminus -E}(f(x) + e - f(\bar{x})) \\ &= d_{-E}(f(x) + e - f(\bar{x})) \geq 0. \end{aligned}$$

由注2.1知 Δ_{-E} 是次可加的, 故

$$\Delta_{-E}(f(x) + e - f(\bar{x})) \leq \Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) + \Delta_{-E}(e).$$

即 $\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) + \Delta_{-E}(e) \geq 0, \forall e \in E$, 故 $\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) + \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \geq 0$, 即

$$\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) \geq -\inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e). \quad (5)$$

下面证明 $\Delta_{-E}(e) = d_{-E}(e), \forall e \in E$. 因为 $\Delta_{-E}(e) = d_{-E}(e) - d_{Y \setminus -E}(e)$, 只需证明 $d_{Y \setminus -E}(e) = 0$. 事实上 $E \subset Y \setminus -K$. 假设不然, 则存在 $\hat{e} \in E$ 使得 $\hat{e} \notin Y \setminus -K$, 则 $-\hat{e} \in K$. 由 E 是改进集, 有 $\mathbf{0} = \hat{e} - \hat{e} \in E + K = E$, 矛盾. 因为 $E \subset K$, 故 $E \subset Y \setminus -E$, 从而 $\Delta_{-E}(e) = d_{-E}(e) \geq 0, \forall e \in E$. 因此

$$\inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) = \inf_{e \in E} \inf_{\hat{e} \in E} \|e + \hat{e}\|. \quad (6)$$

因为 $E + E \subset E + K = E$, 故 $\inf_{\hat{e} \in E} \|e + \hat{e}\| \geq \inf_{\hat{e} \in E} \|\hat{e}\|, \forall e \in E$. 从而 $\inf_{e \in E} \inf_{\hat{e} \in E} \|e + \hat{e}\| \geq \inf_{\hat{e} \in E} \|\hat{e}\|$. 由(6) 式有, $\inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \geq \inf_{\hat{e} \in E} \|\hat{e}\| = d_E(\mathbf{0})$. 于是

$$\begin{aligned} \Delta_{-E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) &= \Delta_{-E}(\mathbf{0}) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) = d_{-E}(\mathbf{0}) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \\ &= d_E(\mathbf{0}) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \leq \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \\ &= - \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e). \end{aligned}$$

结合(5)式可得

$$\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) \geq \Delta_{-E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e).$$

即 $\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) \geq \Delta_{-E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - 2\beta$. 故 $\bar{x} \in AMin(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), 2\beta)$.

下面的例子表明定理4.1的逆不一定成立.

例4.1 令 $X = Y = \mathbf{R}^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $K = \mathbf{R}_+^2$, $f(x) = x$, 且

$$\begin{aligned} E &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, \\ S &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

显然 K 是一个闭凸锥, E 是关于 K 的闭改进集. 令 $\bar{x} = (0, 0) \in S$,

$$\begin{aligned} \Delta_{-E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) &= \Delta_{-E}(\mathbf{0}) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \\ &= d_{-E}(\mathbf{0}) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) = d_E(\mathbf{0}) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \\ &\leq \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \\ &= - \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e) \leq -d_E(\mathbf{0}) \leq 0, \end{aligned}$$

对任意 $x \in S$ 有

$$\begin{aligned} \Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) &= \Delta_{-E}(f(x)) = d_{-E}(f(x)) - d_{Y \setminus -E}(f(x)) \\ &= d_{-E}(f(x)) \geq 0 \geq -d_E(\mathbf{0}) \\ &\geq \Delta_{-E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e), \end{aligned}$$

因此

$$\bar{x} \in AMin(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), 2 \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e)).$$

但是 $\text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x})) \cap (-K) \neq \{0\}$, 因此 $\bar{x} \notin O_{BS}^E(f, S)$.

定理4.2 设 E 是 Y 中关于 K 的闭改进集, $E \subset K$, $\beta = d_E(0)$, 且 $\text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$ 是闭集, 则 $\bar{x} \in \text{SAMin}(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), \beta) \implies \bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$.

证 假设 $\bar{x} \in \text{SAMin}(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), \beta)$, 且 $\bar{x} \notin O_{BS}^E(f, S)$, 则存在 $0 \neq d \in -K$ 使得 $d \in \text{clcone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$. 因为 $\text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$ 是闭集, 故 $d \in \text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$, 从而存在 $\lambda > 0, x \in S, e \in E$, 有 $d = \lambda(f(x) + e - f(\bar{x})) \in -K$. 因为 K 是锥, 故 $f(x) + e - f(\bar{x}) \in -K$. 根据 $E = E + K$ 且 E 是闭集可得

$$f(x) - f(\bar{x}) \in -e - K \subset -E - K = -E = -\text{cl}E,$$

从而根据引理2.2有

$$\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) \leq 0. \quad (7)$$

因为 $\bar{x} \in \text{SAMin}(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), \beta)$, 从而有

$$\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) > \Delta_{-E}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) - \beta = \Delta_{-E}(0) - \beta = d_{-E}(0) - \beta = d_E(0) - \beta = 0.$$

即 $\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})) > 0$, 与(7)式矛盾. 故 $\bar{x} \in O_{BS}^E(f, S)$.

注4.1 文献[8, 15]是把 Δ 函数定义在锥 K 上, 利用函数 Δ_{-K} 分别刻画 E -有效解与 E -Benson 真有效解的非线性标量化特征. 而本文是把 Δ 函数定义在比锥更一般的集合即改进集 E 上, 利用函数 Δ_{-E} 对 E -Benson 真有效解进行的非线性标量化刻画, 因此是把 Δ 函数推广到更一般的集合上而得到的结果.

利用 Δ_{-E} 还可以对广义 E -Benson 真有效解进行非线性标量化刻画, 得到下面推论4.1和推论4.2. 证明过程与定理4.1, 定理4.2相似, 这里省略.

推论4.1 设 E 是 Y 中关于 K 的闭改进集, $E \subset K$, $\beta = d_E(0)$, 且 $\text{cone}(f(S) + E - f(\bar{x}))$ 是闭集, 则 $\bar{x} \in \text{SAMin}(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), \beta) \implies \bar{x} \in O_{BS}^{E\infty}(f, S)$.

推论4.2 设 E 是 Y 中关于 K 的闭凸改进集且 $E \subset K$, $\beta = \inf_{e \in E} \Delta_{-E}(e)$, 则 $\bar{x} \in O_{BS}^{E\infty}(f, S) \implies \bar{x} \in \text{AMin}(\Delta_{-E}(f(x) - f(\bar{x})), 2\beta)$.

参考文献:

- [1] Kutateladze S S. Convex ε -programming[J]. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20(2): 391-393.
- [2] Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. J Math Anal Appl, 1968, 2(3): 618-630.
- [3] Benson H P. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones[J]. J Math Anal Appl, 1979, 71(1): 232-241.
- [4] Borwein J. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. SIAM J Control and Optim, 1977, 15(1): 57-63.
- [5] Henig M I. Proper efficiency with respect to cones[J]. J Optim Theory Appl, 1982, 36(3): 387-407.

- [6] Chicco M, Mignanego F, Pusillo L, et al. Vector optimization problem via improvement sets[J]. J Optim Theory Appl, 2011, 150(3): 516-529.
- [7] Gutierrez C, Jimenez B, Novo V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 223(2): 304 - 311.
- [8] Zhao Kequan, Xia Yuanmei, Yang Xinmin. Nonlinear scalarization characterizations of E-efficiency in vector optimization[J]. Taiwanese J Math, 2015, 19(2): 455-466.
- [9] Zhao Kequan, Yang Xinmin, Peng Jianwen. Weak E-optimal solution in vector optimization[J]. Taiwanese J Math, 2013, 17(4): 1287-1302.
- [10] Lalitha C S, Chatterjee P. Stability and scalarization in vector optimization using improvement sets[J]. J Optim Theory Appl, 2015, 166(3): 825-843.
- [11] Abbasi M, Rezaei M. Vector optimization using improvement sets in locally convex spaces[J]. Mathematical Sciences, 2018, 12: 171-176.
- [12] Xia Yuanmei, Zhang Wanli, Zhao Kequan. Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J]. Optimization Letters, 2016, 10(4): 769-780.
- [13] Zhao Kequan, Yang Xinmin. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(4): 739-752.
- [14] Zhao Kequan, Xia Yuanmei, Guo Hui. A characterization of E-Benson proper efficiency via nonlinear scalarization in vector optimization[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014.
- [15] 夏远梅. 向量优化问题近似解的标量化研究[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2016.
- [16] 廖伟. 向量优化问题近似解的性质研究[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2014.
- [17] 付科程. 向量优化中基于回收锥的真有效解的性质研究[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2015.
- [18] Göpfert A, Riahi H, Tammer C, et al. Variational methods in partially ordered spaces[M]. New York: Springer, 2003.
- [19] Zaffaroni A. Degrees of efficiency and degrees of minimality[J]. SIAM J Control Optim, 2003, 42(3): 1071-1086.
- [20] 秦晨. 向量优化改善集及E-最优解的最优性条件[D]. 重庆: 重庆大学, 2013.
- [21] Gao Ying, Yang Xinmin. Properties of the nonlinear scalar functional and its applications to vector optimization problems[J]. Journal of Global Optimization, 2019, 73: 869-889.

Nonlinear scalarization of proper efficient solutions via improvement set in vector optimization

BAI Xia, LI Fei

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: Two types of nonlinear scalarization function the Gerstewitz functional $\varphi_{q,E}$ and the oriented distance function Δ_{-E} via the improvement set are applied to characterize E-Benson proper efficient solution and generalized E-Benson proper efficient solution of vector optimization problems. Some corresponding examples are constructed to illustrate the conclusions.

Keywords: vector optimization; improvement set; proper efficient solution; nonlinear scalarization

MR Subject Classification: 90C26; 90C29