

时域半平面裂缝反演问题的 线性抽样法求解

秦艺濛¹, 陈博¹, 岳洋²

(1. 中国民航大学理学院, 天津 300300;

2. 吉林化工学院理学院, 吉林吉林 132022)

摘要: 半平面散射问题的散射体具有无界特性, 不能直接进行求解, 因此, 先使用对称延拓的方法, 将问题转化为具有对称结构的有界散射体散射问题, 并给出新问题与原问题的等价性. 之后, 使用线性抽样法对反散射问题进行求解, 证明了线性抽样法的“爆破性”, 并给出数值实验验证算法的可行性.

关键词: 时域; 半平面; 裂缝反演问题; 对称延拓; 线性抽样法

中图分类号: O175.14

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2022)04-0455-09

§1 引言

声学正反散射问题是一类重要的数学物理问题, 正散射问题通常求解散射体对声波散射形成的散射场, 反散射问题则通过入射场和已知散射场数据反演散射体的位置和形状^[1-2]. 通常, 将声学正反散射问题分为两类: 频域问题和时域问题. 频域问题关心的声波是时谐的, 从而可以忽略时间变量的影响, 最终对Helmholtz方程进行分析和求解. 时域问题则关心时间相关的波动问题, 其理论分析较为复杂, 时间变量的存在也增加了问题数值求解的复杂度. 受此影响, 虽然频域问题的研究已较为完善, 时域研究中却还有很多关键问题未得到解决.

虽然时域问题的研究较为困难, 但其问题描述更接近实际问题, 更利于直观了解物理过程, 并且时间相关的多频数据包含更加丰富的信息, 更容易取得较好的反演效果, 因此, 时域问题近年来受到越来越多的关注^[3-4].

本文关心时域半平面裂缝反演问题的求解, 其所对应频域问题的研究已较为充分, 研究者已经使用Newton迭代法, 因子分解法和线性抽样法等方法求解此问题^[5-7]. 相反的, 时域裂缝反演问题的研究寥寥无几, 文献^[8]使用线性抽样法对二维自由空间中裂缝反演问题进行求解, 而对于半平面内的裂缝反演问题, 由于其涉及半平面边界对声波的散射, 散射体具有无界特性, 不能

收稿日期: 2021-12-07 修回日期: 2022-08-10

基金项目: 国家自然科学基金(12101603); 中国民航大学大学生创新创业训练计划(202110059070); 中国民航大学国家自然科学基金配套专项(3122022PT19); 中央高校基本科研业务费项目中国民航大学专项(3122021072)

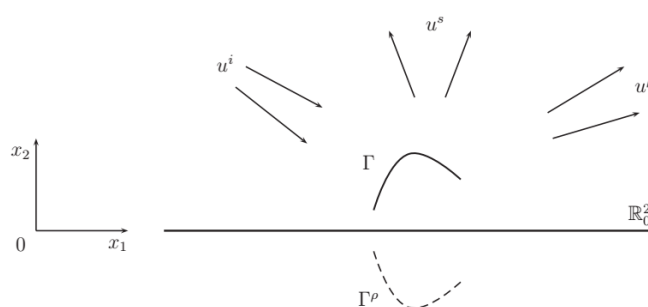


图 1 半平面内裂缝散射问题示意图

直接进行求解. 因此, 先使用对称延拓^[9]的方法将此问题转化为自由空间中有界散射体的对称散射问题. 然后, 对于反散射问题, 使用线性抽样法进行求解, 并借助半空间内Green函数对半空间问题线性抽样法的“爆破性”进行证明.

§2对正散射问题进行分析, 利用对称延拓的手段将原半平面问题转化为全平面对称散射问题, 并证明该对称散射问题与原问题等价; §3给出反散射问题求解的线性抽样法, 并给出半空间问题“爆破性”的证明; §4给出几个数值算例, 证明本文算法的有效性.

§2 正散射问题

考虑在声软无界水平基底上有均匀的可穿透介质, 介质内部有在某方向 l 上无穷延伸的裂缝, 使用平行 l 方向的线源发射的柱面波作为入射波, 在垂直 l 的横截面上进行分析, 建立正反散射问题模型, 即得到二维半平面散射问题.

在二维空间中, 采用Cartesian坐标 (x_1, x_2) , 半平面问题如图1所示. 记上半平面和下半平面分别为 $\mathbf{R}_+^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ 和 $\mathbf{R}_-^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 < 0\}$, 半平面的边界为 $\mathbf{R}_0^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = 0\}$, 裂缝由二维空间中为无尖点的, 自身不相交的分段光滑有向曲线 Γ 表示. 将有向曲线 Γ 对应前进方向的左侧定义为曲线的左侧, 记为 Γ_- , 同理定义曲线的右侧 Γ_+ , 波场在 \mathbf{R}_0^2 和 Γ 上满足Dirichlet边界条件.

在上半平面 \mathbf{R}_+^2 中, 考虑柱面入射波(详见[4])

$$u^i(x, t; x_0) = \int_0^{t-c^{-1}|x-x_0|} \frac{\lambda(\tau)}{2\pi\sqrt{(t-\tau)^2 - c^{-2}|x-x_0|^2}} d\tau, \quad x \in \mathbf{R}_+^2 \setminus \{x_0\}, t \in \mathbf{R},$$

其中 x_0 为源在二维截面中的位置, c 为声波在均匀介质中的传播速度, $\lambda(t)$ 为满足因果性的信号函数. 这里, $\lambda(t)$ 满足因果性是指当 $t < 0$ 时, $\lambda(t) = 0$.

考虑全空间 \mathbf{R}^2 内 D^+ Alembert算子 $c^{-2}\partial_{tt} - \Delta$ 的Green函数

$$G(x, t; y) = \frac{H(t - c^{-1}|x - y|)}{2\pi\sqrt{t^2 - c^{-2}|x - y|^2}},$$

其中 H 为Heaviside函数, $\partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2$. 则入射场恰为Green函数和信号函数的卷积, 即

$$u^i(x, t; x_0) = G(x, t; x_0) * \lambda(t), \quad x \in \mathbf{R}_+^2 \setminus \{x_0\}, t \in \mathbf{R}.$$

对二维空间内一点 $x = (x_1, x_2)$, 定义 $x^\rho = (x_1, -x_2)$ 为其关于 x_1 轴的对称点. 由于半平面问题的特殊结构, 将声波总场 u^{tot} 分解为入射场 u^i , 反射场

$$u^\rho(x, t; x_0) := -G(x, t; x_0^\rho) * \lambda(t), \quad x \in \mathbf{R}_+^2, t \in \mathbf{R}$$

和散射场 u 三个部分.

散射场 $u = u^{tot} - u^i - u^\rho$ 满足

$$c^{-2}\partial_{tt}u - \Delta u = 0 \quad \text{于 } D_e^+ \times \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$u_\pm = -u^i - u^\rho \quad \text{于 } \Gamma \times \mathbf{R}, \quad (2)$$

$$u = -u^i - u^\rho \quad \text{于 } \mathbf{R}_0^2 \times \mathbf{R}, \quad (3)$$

$$u(\cdot, 0) = \partial_t u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{于 } D_e^+, \quad (4)$$

其中 $D_e^+ := \mathbf{R}_+^2 \setminus \Gamma$, $u_\pm(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} u(x \pm h\nu, t)$, ν 为 Γ 上朝向右侧的单位法向量.

正散射问题为: 已知入射场 u^i 和曲线 Γ , 通过初边值问题(1)-(4)求解散射场 u .

如图1所示, 定义 $\Gamma^\rho := \{x : x^\rho \in \Gamma\}$ 为 Γ 关于 x_1 轴的对称映像, 则可以得到全空间内的分段光滑曲线 $\Gamma^T := \Gamma \cup \Gamma^\rho$. 定义 $D_e^- := \mathbf{R}_+^2 \setminus \Gamma^\rho$ 与 $D_e := D_e^+ \cup D_e^-$. 考虑全空间内的对称散射问题

$$c^{-2}\partial_{tt}u - \Delta u = 0 \quad \text{于 } D_e \times \mathbf{R}, \quad (5)$$

$$u_\pm = -u^i - u^\rho \quad \text{于 } \Gamma^T \times \mathbf{R}, \quad (6)$$

$$u(\cdot, 0) = \partial_t u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{于 } D_e. \quad (7)$$

下面命题表明, 对称散射问题(5)-(7)和半空间内的原散射问题(1)-(4)等价.

命题2.1 散射问题(1)-(4)与(5)-(7)等价. 也就是说, 若 $u_h(x, t)$, $x \in D_e^+$, $t \in \mathbf{R}$ 为问题(1)-(4)的解, 则

$$u(x, t) = \begin{cases} u_h(x, t), & x \in D_e^+, t \in \mathbf{R}, \\ -u_h(x^\rho, t), & x \in D_e^-, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (8)$$

为问题(5)-(7)的解. 反之, 若 $u(x, t)$, $x \in D_e$, $t \in \mathbf{R}$ 为问题(5)-(7)的解, 则 $u_h = u|_{D_e^+ \times \mathbf{R}}$ 为问题(1)-(4)的解.

证 若 $u_h(x, t)$, $x \in D_e^+$, $t \in \mathbf{R}$ 为问题(1)-(4)的解, 对 u_h 做奇延拓可得由(8)式定义的 u . 由 u^i 和 u^ρ 的定义可知, $u^i + u^\rho$ 关于变量 x_1 为奇函数, 则对问题(1)-(4)做奇延拓即得问题(5)-(7). 由对称延拓的性质可知, u 为问题(5)-(7)的解.

若 $u(x, t)$, $x \in D_e$, $t \in \mathbf{R}$ 为问题(5)-(7)的解, 则由 u 满足(5), (6)及(7)分别可以得出 $u_h = u|_{D_e^+ \times \mathbf{R}}$ 满足(1), (2)及(4).

此外, 由文献[8]命题1可知, 问题(5)-(7)有唯一解, 则问题(5)-(7)的解 $u(x, t)$ 必关于 x_1 为奇函

数. 若不然, 定义

$$w_1(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & x \in D_e^+, t \in \mathbf{R}, \\ -u(x^\rho, t), & x \in D_e^-, t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

和

$$w_2(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & x \in D_e^-, t \in \mathbf{R}, \\ -u(x^\rho, t), & x \in D_e^+, t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

若 $u(x, t)$ 不关于 x_1 轴对称, 则 $w_1 \neq w_2$. 又由问题(5)-(7)的对称性, w_1 和 w_2 均为问题(5)-(7)的解, 这与问题解的唯一性矛盾, 则 $u(x, t)$ 关于 x_1 为奇函数. 则有 $u = 0$ 于 $\mathbf{R}_0^2 \times \mathbf{R}$, 则 u_h 满足方程(3). 综上所述, u_h 为问题(1)-(4)的解.

这样, 得到了一个与半空间问题等价的对称散射问题, 求解半空间问题时, 只需要对全空间内对称问题求解即可. 对称散射问题的求解和经典裂缝散射问题一致, 使用推迟势边界积分方程方法^[8]进行求解, 这里不做具体的描述.

§3 反散射问题

先简单介绍一些广义函数空间理论(详见[4, 9-10]), 引入Fourier-Laplace变换

$$\mathcal{L}[\varphi](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi(t) dt, \quad \omega \in \mathbf{C}_\sigma,$$

其中 $\mathbf{C}_\sigma := \{\omega \in \mathbf{C} : \text{Im}(\omega) > \sigma > 0\}$. 定义广义函数空间

$$\mathcal{L}'_\sigma(H) := \{\varphi \in \mathcal{D}'(H) : e^{-\sigma t} \varphi \in \mathcal{S}'(H)\},$$

其中 H 为Hilbert空间, $\mathcal{D}'(H)$ 与 $\mathcal{S}'(H)$ 分别为 H 值广义函数空间与缓增广义函数空间. 本文主要关心的时间-空间Sobolev空间为

$$H_\sigma^p(\mathbf{R}, H) := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}'_\sigma(H) : \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} |\omega|^{2p} \|\mathcal{L}[\varphi](\omega)\|_H^2 d\omega < \infty \right\}.$$

空间范数定义为

$$\|\varphi\|_{H_\sigma^p(\mathbf{R}, H)} := \left(\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} |\omega|^{2p} \|\mathcal{L}[\varphi](\omega)\|_H^2 d\omega \right)^{1/2},$$

其中 $\sigma \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$. 特别地, 当 $p = 0$ 时, 记 $H_\sigma^0(\mathbf{R}, H) = L_\sigma^2(\mathbf{R}, H)$, 其它Sobolev空间如 $H^{1/2}(\Gamma)$ 和 $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 见[9].

为描述反问题, 首先需要定义入射曲线 Γ_i 和测量曲线 Γ_m , 本文中, 两者均取为两端在 \mathbf{R}_0^2 上的半圆形弧段, 且假设两者与 \mathbf{R}_0^2 所围成的封闭区域均包含裂缝区域 Γ . 在数值实验中, 通常选取 $\Gamma_i = \Gamma_m$.

本文关心的反散射问题为: 已知入射场 u^i 和探测数据

$$\{u(x, t; y) : x \in \Gamma_m, t \in [0, T], y \in \Gamma_i\}, \quad (9)$$

结合初边值问题(1)-(4)反演曲线 Γ 的位置和形状.

为了探究半空间散射问题的特征, 直接对半空间内散射问题(1)-(4)进行分析. 半空间问题中的散射场为 $u = u^{tot} - u^i - u^\rho$, 这与一般散射问题的散射场定义不同, 求解分析也会有差异. 因

此, 需要定义半空间内新的的单层位势函数

$$(SL_{\Lambda,h}\phi)(x,t) := \int_{\mathbf{R}} \int_{\Lambda} G_h(x,t-\tau;y)\phi(\tau,y)ds_yd\tau, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\bar{\Lambda} \cup \bar{\Lambda}^{\rho}\}, t \in \mathbf{R}$$

和对应的单层位势算子

$$(S_{\Lambda,h}\phi)(x,t) := \int_{\mathbf{R}} \int_{\Lambda} G_h(x,t-\tau;y)\phi(\tau,y)ds_yd\tau, \quad x \in \Lambda \cup \Lambda^{\rho}, t \in \mathbf{R},$$

其中 Λ 为任意分段光滑曲线, Λ^{ρ} 为 Λ 关于 x_1 轴的对称曲线,

$$G_h(x,t;y) := G(x,t;y) - G(x,t;y^{\rho})$$

为有Dirichlet边值半空间内D'Alembert算子的Green函数. 由上文对入射场和反射场的分析可知

$$u^i(x,t;x_0) + u^{\rho}(x,t;x_0) = G_h(x,t;x_0) * \lambda(t), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{x_0, x_0^{\rho}\}, t \in \mathbf{R}.$$

这表明半空间Green函数直接蕴含了对称散射问题的对称特征, 因此, 使用半空间Green函数对对称散射问题进行求解更为方便.

接下来, 考虑反散射问题的线性抽样法求解. 首先, 定义半空间问题的近场算子

$$\mathcal{N} := SL_{\Gamma,h}S_{\Gamma,h}^{-1}SL_{\Gamma,h}^{\lambda},$$

其中 $S_{\Gamma,h}^{-1}$ 为单层位势算子 $S_{\Gamma,h}$ 的逆算子, $SL_{\Gamma,h}^{\lambda} = -SL_{\Gamma,h} * \lambda$. 半空间位势算子和近场算子为全空间对应算子的变形, 虽然应用不同, 但其分析没有本质区别, 这里不做赘述. 此外, 在近场算子的因子分解中涉及迹算子的应用, 这里也不具体写出, 具体分析可参考[9].

对于半空间问题, 还需要定义有对称性质的检验函数^[9]

$$\phi_{z,\mu}(x,t) := \int_{\mathbf{R}} G_h(x,t-\tau-\mu;z)\zeta(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbf{R}_+^2 \setminus \{x_0\}, t \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

其中 $\mu \in \mathbf{R}$ 为时移参数, $\zeta(t)$ 为有紧支集的光滑函数, $z \in D_e^+$ 为抽样点.

则线性抽样法为: 选取时移参数 μ 和抽样点 z , 求解近场方程

$$\mathcal{N}g_{z,\mu} = \phi_{z,\mu} \quad \text{于} \quad \Gamma_m^+ \times \mathbf{R} \quad (11)$$

得 $g_{z,\mu}$. 经典的“爆破性”理论表明, $\|g_{z,\mu}\|$ 在裂缝区域和裂缝之外区域的取值有明显不同, 在此基础上可以描绘 $\|g_{z,\mu}\|^{-1}$ 的图像近似反演裂缝位置.

对于全空间裂缝反演问题时域线性抽样法的“爆破性”, [8]中给出了具体的证明. 然而, 本文描述的问题具有对称性质, 相应的近场算子和检验函数定义也与[8]中不同. 并且, 根据半空间障碍散射问题的研究经验, $\|g_{z,\mu}\|$ 不单单在散射体内外表现不同, 在半空间边界 \mathbf{R}_0^2 上也有特殊性质. 因此, 接下来对半空间线性抽样法的“爆破性”做简单证明.

对于裂缝反演问题的分析, 通常需要一个新的检验函数 $\varphi_{L,\mu}$. 为适应对称问题的特征, 本文定义的 $\varphi_{L,\mu}$ 仍然需要具有对称性. 下面命题给出 $\varphi_{L,\mu}$ 的定义和一个关键性质.

命题3.1 设 L 为无尖点的, 自身不相交的分段光滑曲线, L^{ρ} 为 L 关于 x_1 轴的对称曲线. 设 $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$, $\zeta \in H_{\sigma}^p(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(L))$. 定义检验函数

$$\varphi_{L,\mu}(x,t) := \int_{\mathbf{R}} \int_L G_h(x,t-\tau-\mu;y)\zeta(y,\tau)ds_yd\tau, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\bar{L} \cup \bar{L}^{\rho}\}, t \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

其中 $\mu \in \mathbf{R}$. 则 $\varphi_{L,\mu}$ 在 $SL_{\Gamma,h}$ 的值域内当且仅当 $L \subset (\Gamma \cup \mathbf{R}_0^2)$.

证 由检验函数和单层位势函数的定义, 显然

$$\varphi_{L,\mu}(x,t) = SL_{L,h}\zeta(x,t-\mu), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\bar{L} \cup \bar{L}^{\rho}\}, t \in \mathbf{R}.$$

对于半空间问题, 注意到 $G_h(x, t; y) = 0, \forall x \in \mathbf{R}_0^2$, 则对任意分段光滑曲线 $\Sigma \subset \mathbf{R}_0^2$, 恒有

$$SL_{\Sigma, h}\phi \equiv 0, \quad \forall \phi \in H_\sigma^p(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma)). \tag{13}$$

若 $L \subset (\Gamma \cup \mathbf{R}_0^2)$, 定义

$$\zeta'(x, t) = \begin{cases} \zeta(x, t), & x \in L \cap \Gamma, t \in \mathbf{R}, \\ 0, & x \in \Gamma \setminus L, t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

则 $\zeta' \in H_\sigma^p(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma))$, 且由(13)可得

$$\varphi_{L, \mu} = SL_{L, h}\zeta = SL_\Gamma \zeta',$$

即 $\varphi_{L, \mu}$ 在 $SL_{\Gamma, h}$ 的值域内.

若 $L \not\subset (\Gamma \cup \mathbf{R}_0^2)$, 假设 $\varphi_{L, \mu}$ 仍在 $SL_{\Gamma, h}$ 的值域内, 则必存在 $\zeta_2 \in H_\sigma^p(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma))$ 使得

$$\varphi_{L, \mu}(x, t) = P(x, t) := \int_{\mathbf{R}} \int_{\Gamma} G_h(x, t - \tau; y)\zeta_2(y, \tau)ds_y d\tau, \quad x \in \Gamma_m, t \in \mathbf{R}. \tag{14}$$

考虑 $\varphi_{L, \mu}$ 和 P 的Fourier-Laplace变换(详见[11-12])

$$\mathcal{L}[\varphi_{L, \mu}](x, \omega) = \int_L \Phi_{\omega, h}(x; y)\hat{\zeta}(y, \omega)ds_y, \quad \mathcal{L}[P](x, \omega) = \int_\Gamma \Phi_{\omega, h}(x; y)\hat{\zeta}_2(y, \omega)ds_y,$$

其中 $\hat{\zeta}$ 和 $\hat{\zeta}_2$ 分别为 ζ 和 ζ_2 的Fourier-Laplace变换,

$$\Phi_{\omega, h}(x; y) := \frac{i}{4} \left(H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}|x - y|\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}|x - y^\rho|\right) \right)$$

为Helmholtz算子 $\Delta + (\omega/c)^2$ 在半空间 \mathbf{R}_+^2 内的Green函数. 则由(14)得 $\mathcal{L}[\varphi_{L, \mu}](x, \omega) = \mathcal{L}[P](x, \omega), \forall x \in \Gamma_m, \omega \in \mathbf{C}_\sigma$. 由于 Γ_m 为光滑闭曲线的一部分, 利用频域散射问题解的存在唯一性和唯一延拓原理可得 $\mathcal{L}[\varphi_{L, \mu}] = \mathcal{L}[P]$ 恒成立于 $x \in \mathbf{R}^2 \setminus (\bar{L} \cup \bar{\Gamma})$.

由 $L \not\subset (\Gamma \cup \mathbf{R}_0^2)$, 断言^[8]存在一点 x_0 满足 $x_0 \in L, x_0 \notin \Gamma$ 且 $\zeta(x_0, t) \neq 0$. 则必存在 $B_\varepsilon(x_0) := \{x : |x - x_0| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ 使得 $B_\varepsilon(x_0) \cap \Gamma = \emptyset$. 则 $\mathcal{L}[P](\omega)$ 在 $B_\varepsilon(x_0)$ 中解析, 而 $\mathcal{L}[\varphi_{L, \mu}](\omega)$ 却在 x_0 点有奇性, 这与 $\mathcal{L}[\varphi_{L, \mu}](\omega) = \mathcal{L}[P](\omega)$ 矛盾. 则 $\varphi_{L, \mu}$ 必不在 $SL_{\Gamma, h}$ 的值域内.

注 半空间问题线性抽样法在数值计算时无法区分散射体边界和半空间边界, 这一问题在其它半空间问题中也都存在, 命题3.1较为直观地诠释了半空间裂缝反演问题线性抽样法的这一本质特征.

尽管命题3.1结论与[8]中经典检验函数的性质不同, 类似[8]中的证明方法, 仍然能够得到如下的“爆破性”结果, 这里不再重复具体的证明.

定理3.2 设 $\sigma > 0, p \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \Gamma$ 和 L 为无尖点的, 自身不相交的分段光滑曲线. 则

1. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g_{\mu, \varepsilon}^L \in H_\sigma^4(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i))$ 使得

$$\|\mathcal{N}g_{\mu, \varepsilon}^L - \varphi_{L, \mu}\|_{L_\sigma^2(\mathbf{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} \leq \varepsilon.$$

2. 若 $L \not\subset (\Gamma \cup \mathbf{R}_0^2)$, 对于使得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{N}g_{\mu, \varepsilon}^L - \varphi_{L, \mu}\|_{L_\sigma^2(\mathbf{R}, H^{1/2}(\Gamma_m))} = 0$$

成立的 $g_{\mu, \varepsilon}^L \in H_\sigma^4(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i))$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|g_{\mu, \varepsilon}^L\|_{H_\sigma^4(\mathbf{R}, \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i))} = \infty.$$

注意到本文开始定义的近场方程(11)使用了检验函数 $\varphi_{z, \mu}$, 而“爆破性”的证明却是对检验函数 $\varphi_{L, \mu}$ 进行的. 然而, 当选取适当的密度函数 $\zeta(x, t)$ 时, 检验函数中的曲线 L 可以退化成一点 z ,

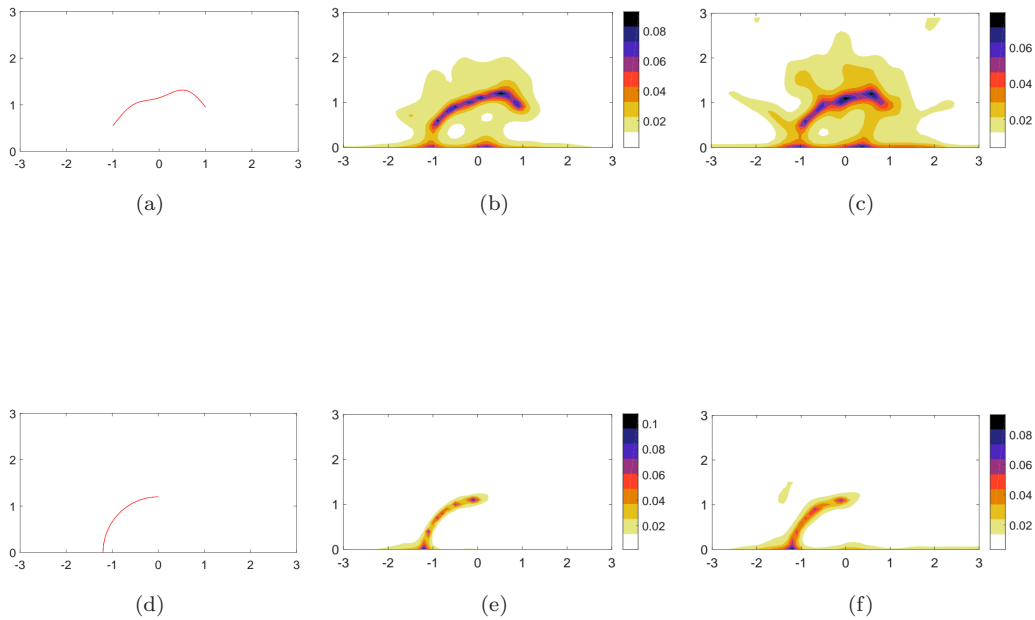


图 2 对半空间内单个裂缝的反演 (a) Γ_1 的真实形状 (b) 对 Γ_1 的反演, $\delta = 1\%$ (c) 对 Γ_1 的反演, $\delta = 5\%$ (d) Γ_2 的真实形状 (e) 对 Γ_2 的反演, $\delta = 1\%$ (f) 对 Γ_2 的反演, $\delta = 5\%$

这保证了使用近场方程(11)进行求解的可行性.

§4 数值实验

本节中, 给出几个数值算例验证线性抽样法对时域半平面裂缝重构的可行性. 选取信号函数为 $\zeta(t) = \lambda(t) = \sin(4t)e^{-1.6(t-3)^2}$, 波速 $c = 1$, 时滞参数 $\mu = 10$, 取结束时间 $T = 20$, 时间步数 $N_T = 129$, 时间离散为 $t_n = n\kappa$, $n = 0, 1, \dots, N_T - 1$, $\kappa = T/(N_T - 1)$. 选取抽样区域为矩形区域 $[-3, 3] \times [0, 3]$, 抽样点为抽样区域内的 61×31 个均匀网格节点.

测量数据(9)使用推迟势边界积分方程方法通过数值模拟得到, 其中发射点和测量点均取为 $4(\cos \frac{k\pi}{8}, \sin \frac{k\pi}{8})$, $k = 1, 2, \dots, 7$. 在反演时, 使用添加了随机噪声的数据

$$u^\delta = u(1 + \delta r),$$

其中 δ 为噪声水平, r 为取值在 $[-1, 1]$ 上的随机数.

在第一个试验中, 分别对半平面内的裂缝

$$\Gamma_1 := \left\{ \left(t, 0.5 \cos \frac{\pi t}{2} + 0.2 \sin \frac{\pi t}{2} - 0.1 \cos \frac{3\pi t}{2} + 0.75 \right) : -1 \leq t \leq 1 \right\}$$

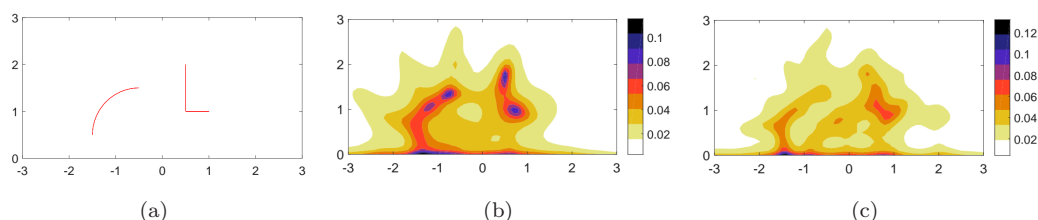


图 3 对半空间内多个裂缝的反演 (a) 多个裂缝的真实形状 (b) 对多个裂缝的反演, $\delta = 1\%$ (c) 对多个裂缝的反演, $\delta = 5\%$

和

$$\Gamma_2 := \left\{ (1.2 \cos t, 1.2 \sin t) : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \right\}$$

进行反演, 噪声水平选取为 $\delta = 1\%$ 和 $\delta = 5\%$ 两种情形. 实验结果如图2所示, 由图2可以看出, 不论裂缝是否与半平面边界相交, 本文算法对裂缝都有较好的反演效果. 从反演效果中, 也能看到半平面问题数值计算的特征, 即在半平面的边界处图像会有一些扰动, 这是由于半空间Dirichlet边界的存在造成的, 这也与命题3.1和定理3.2的结论一致.

在第二个实验中, 考虑使用线性抽样法对多个裂缝的反演. 选取裂缝为一个L型裂缝和一个圆弧形裂缝的组合, 其中L型裂缝为连接(0.5, 2), (0.5, 1)和(1, 1)三点的折线段, 圆弧形裂缝为

$$\Gamma_3 := \left\{ (\cos t - 0.5, \sin t + 0.5) : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \right\}.$$

实验结果如图3所示, 可以看出, 在噪声较小时, 反演算法对多个裂缝的反演是有效果的.

参考文献:

- [1] Colton D, Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory[M]. New York: John Wiley, 1983.
- [2] Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory 3rd edn[M]. Berlin: Springer, 2013.
- [3] Chen Bo, Guo Yukun, Ma Fuming, Sun Yao. Numerical schemes to reconstruct three-dimensional time-dependent point sources of acoustic waves[J]. Inverse Problems, 2020, 36: 075009.
- [4] Sayas F J. Retarded Potentials and Time Domain Boundary Integral Equations: a Roadmap[M]. Switzerland: Springer Series in Computational Mathematics, 2016.
- [5] Cakoni F, Colton D. The linear sampling method for cracks[J]. Inverse Problems, 2003, 19: 279-295.
- [6] Kress R. Inverse scattering from an open arc[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1995, 18: 267-293.

- [7] Wu Qinghua, Yan Guozheng. The factorization method for an open arc[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2015, 33: 517-532.
- [8] Yue Yang, Ma Fuming, Chen Bo. Time domain linear sampling method for inverse scattering problems with cracks[J]. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 2022, 12: 96-110.
- [9] Chen Bo, Ma Fuming, Guo Yukun. Time domain scattering and inverse scattering problems in a locally perturbed half-plane[J]. *Applicable Analysis*, 2017, 96: 1303-1325.
- [10] Chen Qiang, Haddar H, Lechleiter A, et al. A sampling method for inverse scattering in the time domain[J]. *Inverse Problems*, 2010, 26: 85001-85017.
- [11] Banjai L, Sauter S. Rapid solution of the wave equation in unbounded domains[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, 47: 227-249.
- [12] Ha-Duong T. On retarded potential boundary integral equations and their discretisation[J]. *Topics in Computational Wave Propagation*, 2003, 31: 301-336.

Linear sampling method for time-domain inverse scattering problems with cracks in half-plane

QIN Yi-meng¹, CHEN Bo¹, YUE Yang²

(1. College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

2. School of Science, Jilin Institute of Chemical Technology, Jilin 132022, China)

Abstract: The scatterer of the half-plane scattering problem is unbounded and cannot be solved directly. Therefore, the symmetric continuation method is used to transform the problem into a symmetric scattering problem with bounded scatterer, and the equivalence between the two problems is given. Then the linear sampling method is used to solve the inverse scattering problem. The so-called “blow-up” property of the linear sampling method is proved, and the feasibility of the algorithm is verified by numerical experiments.

Keywords: time domain; half-plane; inverse scattering problem with cracks; symmetrical continuation; linear sampling method

MR Subject Classification: 65M32; 35L05