

某些可微函数类的 N 宽度

王家玮, 吴嘎日迪

(内蒙古师范大学 数学科学学院, 内蒙古呼和浩特 010022;
内蒙古师范大学 应用数学中心, 内蒙古呼和浩特 010022)

摘要: 文中借助Jensen不等式, 样条函数等工具研究了Orlicz空间中定义域为 $[-\pi, \pi]$ 的非周期函数类 $W^r L_M^*$ 在 L_1 内Kolmogorov宽度的渐近精确估计及其渐近最优子空间. 并进一步对于该函数类的对偶形式, 在 L_1 空间的对偶空间 L_∞ 空间内讨论了其Kolmogorov 宽度, 线性宽度的渐近精确估计, 特别地, 给出Gelfand宽度对偶形式的精确估计.

关键词: 宽度; 最优子空间; Orlicz空间

中图分类号: O174.41

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2022)03-0365-10

§1 引言

本文用 $M(u)$ 和 $N(v)$ 表示互余的 N 函数, 关于 N 函数的定义及其性质见文献[1]中P1, 由 N 函数 $M(u)$ 生成的Orlicz空间 $L_M^*[-\pi, \pi]$ 是指具有有限的Orlicz范数

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v, N) \leq 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)dx \right|$$

的可测函数的全体 $\{u(x)\}$, 其中 $\rho(v, N) = \int_{-\pi}^{\pi} N(v(x))dx$ 是 $v(x)$ 关于 $N(v)$ 的模. 由[1]中P77知, L_M^* 的对偶空间为 $L_{(N)}^*$, $v(x) \in L_{(N)}^*$ 范数可由

$$\|v\|_{(N)} = \inf \left\{ k : k > 0, \int_{-\pi}^{\pi} N\left(\frac{v(x)}{k}\right) dx \leq 1 \right\}$$

计算.

文中 C 表示常数, 且在不同处可取不同的值.

设 $W^r L_M^*[-\pi, \pi]$ 表示 $[-\pi, \pi]$ 上 r 次非周期可微函数类, $f^{(r-1)}$ 绝对连续, 且 $\|f^{(r)}\|_M \leq 1$. 下面用 L_s 表示任一线性赋范空间, $\|\cdot\|$ 表示该空间上的范数.

收稿日期: 2021-08-16 修回日期: 2022-02-20

基金项目: 国家自然科学基金(11761055); 内蒙古师范大学研究生科研创新基金(CXJJS20091)

$W^r L_M^*[-\pi, \pi]$ 在 L_s 下的 n 维 Kolmogorov 宽度, 线性宽度, Gelfand 宽度分别定义为^[2, P298]

$$d_n(W^r L_M^*, L_s) = \inf_{L_n} \sup_{f \in W^r L_M^*} \inf_{g \in L_n} \|f - g\|_s,$$

$$d'_n(W^r L_M^*, L_s) = \inf_{L_n} \inf_A \sup_{f \in W^r L_M^*} \|f - Af\|_s,$$

$$d^n(W^r L_M^*, L_s) = \inf_{L^n} \sup_{f \in W^r L_M^* \cap L^n} \|f\|_s.$$

其中 $L_n \subset L_s$ 为 L_s 的任一 n 维子空间, L^n 是 L_s 的 n 余维子空间, A 是 $W^r L_M^* \rightarrow L_n$ 的任一线性有界算子.

L_p 空间中非周期类 $W^r L_p$ 内的函数可以分解为一个周期卷积函数加一个代数多项式的形式, 若可解决相应的周期卷积函数类的宽度问题, 那么非周期类的宽度问题也可得到解决, 文献[2]研究了周期可微函数类

$$W_*^r H_p^0 = \left\{ f(x) : f(x) = \frac{a_0}{2} + \pi^{-1} D_r * \varphi, \varphi \in H_p^0 \right\},$$

其中

$$H_p^0 = \{ \varphi(x) : \varphi(x) \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1, \varphi \perp 1 \},$$

$$D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos \left(kt + \frac{\pi r}{2} \right).$$

并得到以下两个结果.

定理A

$$d_{2n-1}(W_*^r H_p^0, L_1) = d_{2n}(W_*^r H_p^0, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}, \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \right), 1 \leq p \leq \infty.$$

定理B

$$d_{2n-1}(W_*^r H_\infty^0, L_p) = d_{2n}(W_*^r H_\infty^0, L_p) = \|\varphi_{n,r}\|_p, 1 \leq p \leq \infty.$$

定理中 $\varphi_{n,r}$ 均表示 $\text{sign}(\sin nx)$ 的 r 阶周期积分, 且满足在周期上的平均值为零.

文献[3]将上述结果推广到非周期函数类上. 本文将进一步研究 Orlicz 空间中定义域为 $[-\pi, \pi]$ 的非周期函数类 $W^r L_M^*$ 在 L_1 内 Kolmogorov 宽度的渐近精确估计及其渐近最优子空间, 并进一步讨论 Kolmogorov 宽度, 线性宽度, Gelfand 宽度的对偶形式.

下面引入 Orlicz 内的周期函数类

$$W_*^r H_M = \left\{ f(x) : f = \frac{a_0}{2} + \pi^{-1} D_r * \varphi, \varphi \in H_M \right\},$$

$$H_M = \{ \varphi(x) : \varphi(x) \in L_M^*, \|\varphi\|_M \leq 1 \},$$

特别的

$$H_M^0 = \{ \varphi(x) : \varphi(x) \in L_M^*, \|\varphi\|_M \leq 1, \varphi \perp 1 \}.$$

定义1.1 X 是一个 Banach 空间, 其范数为 $\|\cdot\|_X$, $\mathfrak{M} \subset X$ 是其中心对称集, $F_N \subset X$ 为 X 的子空间, $\dim(F_N) \leq N$. 称 $\{F_N\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 在 X 内关于 Kolmogorov 宽度的渐近最优子空间, 如果

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(\mathfrak{M}, F_N)_X}{d_N(\mathfrak{M}, X)} = 1.$$

此处 $E(\mathfrak{M}, F_N)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{g \in F_N} \|f - g\|_X$.

$\forall f \in W^r L_M^*[-\pi, \pi]$, 有 $f^{(r)} \in L_M^*[-\pi, \pi]$, $\|f^{(r)}\|_M \leq 1$. 把 $f^{(r)}(t)$ 延拓到整个实数轴上, 延拓后的周期函数仍用 $f^{(r)}(t)$ 表示. 令

$$\varphi = f^{(r)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) dt.$$

显然 $\varphi \in L_M^*[-\pi, \pi]$ 且 $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0$. 取 φ 的一个 r 阶周期积分

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t) \varphi(t) dt.$$

由于 $\int_0^{2\pi} D_r(x-t) dt = 0$, 因此

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t) f^{(r)}(t) dt.$$

由于 $\phi^{(r)}(x) = \varphi(x)$ a.e. 成立, 则

$$f(x) = \phi(x) + \pi_r(x), \quad -\pi < x < \pi.$$

其中 $\pi_r(x)$ 是一个 r 次代数多项式. 由此把非周期函数类 $W^r L_M^*[-\pi, \pi]$ 内的函数进行了分解.

§2 主要结果

定理 2.1 $d_n(W^r L_M^*, L_1) \approx 2^r \|\varphi_{n,r}\|_{(N)} (n \rightarrow \infty)$.

证 首先证明对于周期函数类 $W_*^r H_M^0$ 有

$$d_n(W_*^r H_M^0, L_1) = d_n(W_*^r H_M, L_1) = \left\| \varphi_{[\frac{n+1}{2}, r]} \right\|_{(N)}. \quad (1)$$

因为 $W_*^r H_M^0 \subset W_*^r H_M$, 由宽度的性质可知

$$d_{2n}(W_*^r H_M^0, L_1) \leq d_{2n}(W_*^r H_M, L_1) \leq d_{2n-1}(W_*^r H_M, L_1).$$

由文献[4]中定理1结合文献[5]的计算方法可得

$$d_{2n}(W_*^r H_M^0, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

因此只需证明

$$d_{2n-1}(W_*^r H_M, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{(N)},$$

为此, 取 $2n-1$ 维三角多项式子空间 $F_{2n-1}^T \subset L_1$, 对于 $\forall f \in W_*^r H_M$, 由文献[2]中 P64 最佳逼近的

对偶定理有

$$\begin{aligned}
 e(f, F_{2n-1}^T)_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \in F_{2n-1}^T} \|f - \varphi\|_1 \\
 &= \sup_{\substack{\|h\|_\infty \leq 1 \\ h \perp F_{2n-1}^T}} \int_0^{2\pi} f(t)h(t)dt \\
 &= \sup_{\substack{\|h\|_\infty \leq 1 \\ h \perp F_{2n-1}^T}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t)f^{(r)}dt \right\} h(x)dx \\
 &= \sup_{\substack{\|h\|_\infty \leq 1 \\ h \perp F_{2n-1}^T}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t)h(x)dx \right\} f^{(r)}dt \\
 &= \sup_{h_r(t) \in W_*^r H_M^0} \int_0^{2\pi} h_r(t)f^{(r)}dt,
 \end{aligned}$$

其中 $h_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t)h(x)dx \in W_*^r H_M^n$, 而

$$W_*^r H_M^n = \{f(x) : f = \pi^{-1} D_r * \varphi, \|\varphi\|_\infty \leq 1, \varphi \perp F_{2n-1}^T\}.$$

由Hölder不等式得

$$\sup_{h_r(t) \in W_*^r H_M^0} \int_0^{2\pi} h_r(t)f^{(r)}(t)dt \leq \sup_{h_r} \|h_r\|_{(N)} \|f^{(r)}\|_M \leq \sup_{h_r} \|h_r\|_{(N)} = \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

事实上, 由文献[6]可知上式中最后一个等号成立. 由此可得

$$E(W_*^r H_M, F_{2n-1}^T)_1 = \sup_{f \in W_*^r H_M} e(f, F_{2n-1}^T)_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

从而

$$d_{2n-1}(W_*^r H_M, L_1) = \inf_{F_{2n-1}^T} E(W_*^r H_M, F_{2n-1}^T)_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

式(1)得证.

接下来考虑非周期函数类 $W^r L_M^*$. 令 $\mathcal{P}_r$ 表示 r 次代数多项式子空间, 且

$$\mathcal{L}_{(2n-1)+r} = F_{2n-1}^T \oplus \mathcal{P}_r$$

是 $L_1[-\pi, \pi]$ 内 $(2n-1) + r$ 维子空间, 任取 $f \in W^r L_M^*[-\pi, \pi]$, 由非周期函数类内的函数分解式 $f = \phi + \pi_r$, $\phi \in W_*^r H_M$ 与式(1)可得

$$\begin{aligned}
 d_{(2n-1)+r}(W^r L_M^*, L_1) &\leq e(f, \mathcal{L}_{(2n-1)+r})_1 = \inf_{g \in \mathcal{L}_{(2n-1)+r}} \|f - g\|_1 \leq \inf_{t_{n-1} \in F_{2n-1}^T} \|\phi - t_{n-1}\|_1 \\
 &\leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.
 \end{aligned}$$

于是得到对于 $W^r L_M^*$, 有

$$d_{(2n-1)+r}(W^r L_M^*, L_1) \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}. \quad (2)$$

任取一自然数 $N > r$ 使 $N - r$ 为奇数, 由式(2)可知

$$d_N(W^r L_M^*, L_1) \leq \left\| \varphi_{\frac{N-r+1}{2}, r} \right\|_{(N)}.$$

由于 $d_N(W_*^r H_M^0, L_1) \leq d_N(W^r L_M^*, L_1)$, 由式(1)有

$$d_N(W_*^r H_M^0, L_1) = \begin{cases} \left\| \varphi_{[\frac{N+1}{2}], r} \right\|_{(N)} & N \text{ 为奇数,} \\ \left\| \varphi_{\frac{N}{2}, r} \right\|_{(N)} & N \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

从而

$$\left\| \varphi_{[\frac{N+1}{2}], r} \right\|_{(N)} \leq d_N(W^r L_M^*, L_1) \leq \left\| \varphi_{\frac{N-r+1}{2}, r} \right\|_{(N)},$$

利用 $\varphi_{n,r}$ 的性质易知

$$d_n(W^r L_M^*, L_1) \approx 2^r \|\varphi_{n,r}\|_{(N)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

定理2.1得证.

定理2.1证明了 $\mathcal{L}_{(2n-1)+r}$ 可以作为非周期函数类 $W^r L_M^*$ 的一个渐近最优子空间, 下面的定理将说明 $W^r L_M^*$ 与 $W_*^r H_M^0$ 的渐近最优子空间之间有着密切的关系.

定义2.1 取

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \frac{k-1}{n}\pi \leq x \leq \frac{k}{n}\pi, \\ 0 & 0 \leq x < \frac{k-1}{n}\pi, \frac{k}{n}\pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

$$\varphi_k(x+2\pi) = \varphi_k(x), k = 1, 2, \dots, 2n, n = 1, 2, \dots.$$

令

$$S_{2n}^0 = \left\{ f(x) : f(x) = \sum_{k=1}^{2n} C_k \varphi_k(x) \right\},$$

$$S_{2n}^r = \left\{ f(x) : f(x) = \frac{a_0}{2} + \pi^{-1} D_r * \varphi \right\},$$

其中

$$\varphi \in S_{2n}^0, \quad \sum_{k=1}^{2n} C_k = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots.$$

S_{2n}^r 被称为 r 次的关于分割 $\left\{ \frac{k\pi}{n} \right\}_{k=1}^{2n}$ 的多项式型样条, 它是 L_1 空间的 $2n$ 维子空间. 函数类 $S_{2n}^r (r = 0, 1, 2, \dots)$ 在点

$$t_{k,r} = \begin{cases} \frac{2k-1}{2n}\pi & r \text{ 为偶数} \\ \frac{k-1}{n}\pi & r \text{ 为奇数} \end{cases}$$

上满足对任意数组 $(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ 有唯一的 $\sigma(t) \in S_{2n}^r$ 使

$$\sigma(t_{k,r}) = \eta_k, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

文献[6]中证明了 S_{2n}^r 是 $W_*^r H_M^0$ 在 L_1 内的 $2n$ 维最优子空间, 即

$$d_{2n}(W_*^r H_M^0, L_1) = E(W_*^r H_M^0, S_{2n}^{r-1}) = \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

下面令 L_1 的 $(2n+1)+r$ 维子空间为

$$\mathcal{L}_{(2n+1)+r} = S_{2n}^{r-1} \oplus \mathcal{P}_r \oplus \text{span}\{D_r\}.$$

则有如下定理.

定理2.2 $\mathcal{L}_{(2n+1)+r}$ 是 $W^r L_M^*$ 在 L_1 内的 $(2n+1)+r$ 维渐近最优子空间, 即

$$d_{(2n+1)+r}(W^r L_M^*, L_1) = E(W^r L_M^*, \mathcal{L}_{(2n+1)+r}) \approx 2^r \|\varphi_{n,r}\|_{(N)} (n \rightarrow \infty).$$

证 令

$$h_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t)h(t)dt,$$

其中 $\|h\|_\infty \leq 1, h \perp S_{2n}^{r-1}$, 显然有 $\int_0^{2\pi} h(t)dt = 0$. 下面先证

$$\sup_{\substack{\|h\|_\infty \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \|h_r(t) - h_r(0)\|_{(N)} = \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}. \quad (3)$$

由文献[6]可知, 对任意 $h_r(t)$ 及 $\psi \in S_{2n}^0$ 有

$$\int_0^{2\pi} h_r'(t)\psi(t)dt = 0.$$

由分部积分计算可得

$$\int_{\Delta_k} h_r(t)dt = 0, \quad \Delta_k = \left(\frac{k-1}{n}\pi, \frac{k}{n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, 2n.$$

令

$$h_r^*(t) = \int_0^t h_r'(u)du = h_r(t) - h_r(0),$$

由文献[6]可得

$$|h_r^*(t)| = |h_r(t) - h_r(0)| \leq |\varphi_{n,r}(t)|,$$

从而

$$\sup_{\substack{\|h\|_\infty \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \|h_r(t) - h_r(0)\|_{(N)} \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

另一方面, 若 $h_r(t)$ 满足补充条件

$$\|h_r\|_{(N)} =: M_1(h_r)_{(N)} = \min_{\lambda} \sup_{\rho(u,M) \leq 1} \left| \int_{-1}^1 (h_r(t) - \lambda) u(x) dx \right|,$$

则有

$$\sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1} \\ \|h_r\|_{(N)} = M_1(h_r)_{(N)}}} \|h_r\|_{(N)} \leq \sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \|h_r(t) - h_r(0)\|_{(N)}.$$

文献[6]中证得

$$\sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1} \\ \|h_r\|_{(N)} = M_1(h_r)_{(N)}}} \|h\|_{(N)} = \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

因此有

$$\sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \|h_r(t) - h_r(0)\|_{(N)} \geq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

式(3)得证.

首先令 $\mathcal{L}_{2n+1} = S_{2n}^{r-1} \oplus \text{span}\{D_r\}$, 结合文献[3]中定理2的方法可以证明

$$E(W_*^r L_M^*, \mathcal{L}_{2n+1})_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

事实上, 任取 $f \in W_*^r H_M$, 即 $f = \frac{a_0}{2} + \pi^{-1} D_r * \varphi, \varphi \in H_M$. 令

$$g(x) = f(x) - \left\{ \frac{a_0}{2} + D_r(x) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt \right\},$$

则

$$\begin{aligned} E(g, S_{2n}^{r-1})_1 &= \sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \int_0^{2\pi} g(x) h(x) dx \\ &= \sup_h \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{D_r(x-t) - D_r(x)\} \varphi(t) dt \right\} h(x) dx \\ &= \sup_h \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{D_r(x-t) - D_r(x)\} h(x) dx \right\} \varphi(t) dt \\ &\leq \sup_h \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{D_r(x-t) - D_r(x)\} h(x) dx \right\|_{(N)} \|\varphi\|_M \\ &\leq \sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \|h_r(t) - h_r(0)\|_{(N)} \\ &= \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}. \end{aligned}$$

于是

$$E(f, \mathcal{L}_{2n+1})_1 \leq E(g, S_{2n}^{r-1})_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)},$$

所以 $E(W_*^r L_M^*, \mathcal{L}_{2n+1})_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}$ 成立.

接下来研究 $\mathcal{L}_{(2n+1)+r} = \mathcal{L}_{2n+1} \oplus \mathcal{P}_r$ 对类 $W^r L_M^*$ 的平均逼近. 由于 $f \in W^r L_M^*[-\pi, \pi]$ 可以分解为 $f = \phi + \pi_r, \phi \in W_*^r H_M, \pi_r \in \mathcal{P}_r$, 故

$$E(f, \mathcal{L}_{(2n+1)+r})_1 \leq E(\phi, \mathcal{L}_{2n+1})_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)},$$

又因为

$$\left\| \varphi_{[\frac{2n+1+r}{2}], r} \right\|_{(N)} \leq d_{2n+1+r}(W_*^r H_M^0, L_1) \leq d_{2n+1+r}(W^r L_M^*, L_1) \leq \sup_f E(f, \mathcal{L}_{(2n+1)+r})_1,$$

即有

$$\left\| \varphi_{[\frac{2n+1+r}{2}], r} \right\|_{(N)} \leq E(W^r L_M^*, \mathcal{L}_{(2n+1)+r})_1 \leq \|\varphi_{n,r}\|_{(N)}.$$

由定理2.1可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(W^r L_M^*, \mathcal{L}_{(2n+1)+r})_1}{d_{2n+1}(W^r L_M^*, L_1)} = 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

定理2.2证毕.

接下来考虑分别研究三种宽度的对偶形式.

定理2.3

$$d_n(W^r L_\infty, L_M^*) \approx d'_n(W^r L_\infty, L_M^*) \approx 2^r \|\varphi_{n,r}\|_M, \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$d^{2n-1}(W^r L_\infty, L_M^*) = \|\varphi_{n,r}\|_M.$$

证 由文献[7]中结论结合文献[5]中的方法可证得

$$\sup_{f \in W_*^r H_\infty^0} \|f - \sigma_{2n}^{r-1}\|_M \leq \|\varphi_{n,r}\|_M.$$

这里 $\sigma_{2n}^{r-1}(f, x)$ 是函数 $f(x) \in S_{2n}^{-1}$ 的插值样条, 插值点为 $\{t_{k,r-1}\}$. $\sigma_{2n}^{r-1}(f, x)$ 可表示为

$$\sigma_{2n}^{r-1}(f, x) = \sum_{i=1}^{2n} f(t_{i,r-1}) L_i(x),$$

其中 $L_i(x)$ 表示基本样条, 即 $L_i(t_{k,r-1}) = \delta_{i,k}, (i, k = 1, 2, \dots, 2n)$.

对 $\forall f(x) \in W_*^r H_M^0$ 有

$$\sigma_{2n}^{r-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \left\{ \sum_{i=1}^{2n} L_i(x) D_r(t_{i,r-1} - t) \right\} dt,$$

因此

$$f(x) - \sigma_{2n}^{r-1}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \left\{ D_r(x - t) - \sum_{i=1}^{2n} L_i(x) D_r(t_{i,r-1} - t) \right\} dt.$$

利用文献[7]能够证明可以找到一个函数 $F_{n,r}(x)$ 使

$$\mathcal{K}_{n,r}(x, t) = D_r(x - t) - \sum_{i=1}^{2n} L_i(x) D_r(t_{i,r-1} - t) + F_{n,r}(x),$$

且满足

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}_{n,r}(x, t)| dt \leq |\varphi_{n,r}(x)|.$$

对于 $\forall f \in W_*^r H_\infty$, 有 $f = \frac{a_0}{2} + \pi^{-1} D_r * \varphi$, $\varphi \in H_\infty$, 且

$$\left| f(x) - \sigma_{2n}^{r-1}(f, x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt \cdot F_{n,r}(x) \right| \leq |\varphi_{n,r}(x)|.$$

由此

$$\left\| f(x) - \sigma_{2n}^{r-1}(f, x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt \cdot F_{n,r}(x) \right\|_M \leq \|\varphi_{n,r}(x)\|_M.$$

下面考虑对 $\forall f \in W^r L_\infty$, 由函数分解可知 $f = \phi + \pi_r$, $\phi \in W_*^r H_\infty$, $\pi_r \in \mathcal{P}_r$,

$$\left\| f(x) - \pi_r(x) - \sigma_{2n}^{r-1}(\phi, x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^r(t) dt \cdot F_{n,r}(x) \right\|_M \leq \|\varphi_{n,r}(x)\|_M.$$

于是

$$d_{2n+1+r}(W^r L_\infty, L_M^*) \leq \|\varphi_{n,r}(x)\|_M.$$

又因为 $W_*^r H_\infty^0 \subset W^r L_\infty$, 结合定理B及文献[3]中定理4的计算方法有

$$\left\| \phi_{[\frac{2n+1+r}{2}], r} \right\|_M = d_{2n+1+r}(W_*^r H_\infty^0, L_M^*) \leq d_{2n+1+r}(W^r L_\infty, L_M^*).$$

故

$$d_n(W^r L_\infty, L_M^*) \approx 2^r \|\varphi_{n,r}\|_M \quad (n \rightarrow \infty).$$

注意到

$$\pi_r(x) + \sigma_{2n}^{r-1}(\phi, x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^r(t) dt \cdot F_{n,r}(x)$$

线性依赖于 f , 即得

$$d'_n(W^r L_\infty, L_M^*) \approx 2^r \|\varphi_{n,r}\|_M, \quad (n \rightarrow \infty).$$

由文献[8]可得

$$d^{2n-1}(W^r L_\infty, L_M^*) \leq \sup_{\substack{f \in W^r L_\infty \\ f \perp T_n}} \|f\|_M = \|\varphi_{n,r}\|_M,$$

其中 $T_n \in L_M^*$ 为阶数不超过 $n-1$ 的三角多项式.

定义2.2 Q_n 表示以 2π 为周期的函数类, 且满足对 $\forall f(x) \in Q_n$, 存在点 $x_0 < x_1 < \dots < x_N = x_0 + 2\pi$, $1 \leq N \leq 2n$. 满足对每一个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $f(x) = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

令 $f(x) \in Q_n$, 且在区间 $[0, 2\pi]$ 上的平均值为0, 令 $f_r(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 r 阶周期积分, 由文献[4]的推论3可得

$$\|\varphi_{n,r}\|_M \leq \|f_r\|_M.$$

对 L_M^* 中任意不包含常数的子空间 L_{2n} , 由文献[4], 存在一个函数 $F(x) \in L_{2n}$ 满足 $F^{(r)}(x) \in Q_n$. 于是

$$\|\varphi_{n,r}\|_M \leq \|F\|_M \leq d^{2n-1}(W^r L_\infty, L_M^*).$$

因此

$$d^{2n-1}(W^r L_\infty, L_M^*) = \|\varphi_{n,r}\|_M.$$

定理2.3证毕.

参考文献:

- [1] 吴从炘, 王延辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.
- [2] 孙永生. 函数逼近论(上)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1989.
- [3] 孙永生. 关于可微函数类的Kolmogorov宽度[J]. 北京师范大学学报, 1981, (03):25-35
- [4] Ligun A A. Diameters of certain classes of differentiable periodic functions[J]. Math Notes, 1976, 4(1): 109-127.
- [5] Wu Garidi. On n -widths of some periodic convolution classes in Orlicz spaces[J]. Approx Theory Appl, 1998, 14(3): 25-35.
- [6] Korneichuk N P. Extremal Problems of Approximation Theory of Functions (in Russian)[M]. Moscow: Publishing House Science, 1977.
- [7] Zhensykbaev A A. The approximation of periodic differentiable functions by splines with respect to a uniform partition[J]. Math Notes, 1973, 6(01): 483-489.
- [8] Taikov L V. Mean approximations to certain classes of periodic functions[J]. Tr Mat Inst Akad Nauk SSSR, 1967, 88: 61-70.

N width of some differentiable function classes

WANG Jia-wei, WU Ga-ridi

(School of Math. Sci., Inner Mongolia Normal Univ., Inner Mongolia 010022, China;
Center for Appl. Math., Inner Mongolia Normal Univ., Inner Mongolia 010022, China)

Abstract: In this paper, with the help of Jensen's inequality, spline function and other tools, the Kolmogorov width of the aperiodic function class $W^r L_M^*$ whose domain is $[-\pi, \pi]$ in Orlicz space is studied in L_1 . Asymptotically exact estimation and its asymptotically optimal subspace. Further, for the dual form of this function class, in the dual space L_∞ space of L_1 space, its Kolmogorov width, the asymptotic of linear width are discussed. Near-exact estimates, in particular, give exact estimates of the Gelfand width dual form.

Keywords: width; optimum subspace; Orlicz space

MR Subject Classification: 41A46