

完全二部图 $K_{8,n}$ ($8 \leq n \leq 34$)的点可区别 E-全染色

杨 澜, 陈祥恩

(西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃兰州 730070)

摘 要: 图 G 的一个E-全染色是指使相邻点染以不同颜色, 且每条关联边与它的端点染以不同的颜色的全染色. 对图 G 的一个E-全染色 φ , 一旦 $\forall u, v \in V(G), u \neq v$, 就有 $C(u) \neq C(v)$, 其中 $C(x)$ 表示在 φ 的作用下点 x 的颜色以及与 x 关联的边的色所构成的集合, 则 φ 称为图 G 的点可区别的E-全染色(Vertex-Distinguishing E-Total Coloring), 简称为VDET染色. 令 $\chi_{vt}^e(G) = \min\{k | G \text{ 存在 } k\text{-VDET 染色}\}$, 称 $\chi_{vt}^e(G)$ 为图 G 的点可区别E-全色数. 文中利用组合分析法, 反证法及构造具体染色, 讨论并给出了完全二部图 $K_{8,n}$ ($8 \leq n \leq 34$)的点可区别E-全色数.

关键词: 完全二部图; E-全染色; 点可区别E-全染色; 点可区别E-全色数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2021)04-0492-09

§1 引 言

关于图的点可区别一般边染色已进行了许多研究(如[1-4]). 图 G 的一个E-全染色 φ 是指使相邻点着以不同色且每条关联边与它的端点着以不同的色的全染色. 用 $C(x)$ 表示在 φ 的作用下点 x 的颜色以及与 x 关联的边的色所构成的集合(非多重集合). 设 φ 为 G 的一个E-全染色, 若 $\forall u, v \in V(G), u \neq v$, 有 $C(u) \neq C(v)$, 则 φ 称为图 G 的点可区别E-全染色(Vertex-Distinguishing E-Total Coloring), 简称为VDET染色. 令 $\chi_{vt}^e(G) = \min\{k | G \text{ 存在 } k\text{-VDET 染色}\}$. 称 $\chi_{vt}^e(G)$ 为图 G 的点可区别E-全色数.

文[5]中探讨了完全图, 完全二部图 $K_{2,n}$, 星, 轮, 扇, 路和圈的VDET染色. 文[6]中得出了 m 个三阶圈的联图和 m 个四阶圈的联图的VDET色数. 文[7-9]中讨论了完全二部图 $K_{3,n}$, $K_{4,n}$, $K_{5,n}$ 的VDET染色, 文[10-11]中部分讨论了完全二部图 $K_{7,n}$ 的VDET染色. 本文主要讨论了 $K_{8,n}$ ($8 \leq n \leq 34$)的VDET染色并且得到了 $K_{8,n}$ 的VDET色数.

在本文中, 对于完全二部图 $K_{8,n}$, 令 $V(K_{8,n}) = X \cup Y$, $E(K_{8,n}) = \{u_i v_j : 1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq n\}$, 其中 $X = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$, $Y = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

给定 $K_{8,n}$ 的一个点可区别E-全染色 φ , 令

$$C(X) = \{C(u_1), C(u_2), \dots, C(u_8)\}, \quad C(Y) = \{C(v_1), C(v_2), \dots, C(v_n)\}.$$

给定一个正整数 k , $\{1, 2, \dots, k\}$ 的 i -子集是指 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的包含 i 个元素的集合.

给定一个正整数 l , 一个集合 M , $|M| = l$ 是指集合 M 中包含 l 个元素.

§2 主要结果及其证明

定理1 当 $8 \leq n \leq 34$ 时, 有 $\chi_{vt}^c(K_{8,n}) = 6$.

证 先证 $K_{8,n}$ 不存在5-VDET染色. 设 $K_{8,n}$ 有一个5-VDET染色 φ , 颜色分别为1, 2, 3, 4, 5. 考虑以下4种情形.

情形1 $|\{\varphi(u_i) | i = 1, 2, \dots, 8\}| = 1$.

不妨设 $\varphi(u_i) = 1, i = 1, 2, \dots, 8$, 则每个 $C(v_j)$ 均不包含颜色1, 因此可以作为 Y 中顶点色集合 $\mathcal{A}$ 的 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集的数目为 $\binom{5-1}{2} + \binom{5-1}{3} + \binom{5-1}{4} = 11$. 当 $12 \leq n \leq 34$ 时, 矛盾. 下面考虑 $8 \leq n \leq 11$ 的情况. 令 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, 其中

$$\mathcal{A}_1 = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

此时 $\mathcal{A}_1$ 中至少有3个成员都属于 $C(Y)$, 可知: 在2, 3, 4, 5中至少有一种色同时包含在每个 $C(u_i)$ 中, 不妨设 $2 \in C(u_i), i = 1, 2, \dots, 8$, 则每个 $C(u_i)$ 只可能是以下8个集合之一: $\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 又因为 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ 这三个集合中至少有一个属于 $C(Y)$, 则 $\{1, 2\}$ 一定不属于 $C(X)$, 7个集合不能区分 X 中的8个顶点, 矛盾.

情形2 $|\{\varphi(u_i) | i = 1, 2, \dots, 8\}| = 2$.

不妨设 $\varphi(u_i) \in \{1, 2\}, i = 1, 2, \dots, 8$, 则当每个 $C(v_j)$ 是2-子集时既不包含颜色1也不包含颜色2, 因此可以作为 Y 中顶点色集合 $\mathcal{B}$ 的 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集的数目为 $\binom{3}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 19$. 当 $20 \leq n \leq 34$ 时, 矛盾. 下面考虑 $8 \leq n \leq 19$ 的情况. 令 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, 其中

$$\mathcal{B}_1 = \{\{i, j\} | 3 \leq i < j \leq 5\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{\{1, 2, i\} | i = 3, 4, 5\},$$

$\mathcal{B}_3$ 是 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的4-子集, 5-子集以及不在 $\mathcal{B}_2$ 中的3-子集构成的集合.

情形2.1 $\mathcal{B}_1$ 中的成员均不属于 $C(Y)$, 显然也不属于 $C(X)$.

情形2.1.1 Y 中任一顶点的色集合不含 $\mathcal{B}_2$ 中的成员.

事实1 (i) $\mathcal{B}_3$ 中包含 i 的成员有8个, $i = 1, 2$;

(ii) $\mathcal{B}_3$ 中包含 j 的成员有10个, $j = 3, 4, 5$;

(iii) $\mathcal{B}_3$ 中同时包含1和2的成员有4个;

(iv) $\mathcal{B}_3$ 中同时包含 i 和 j 的成员有6个, $i = 1, 2, j = 3, 4, 5$;

(v) $\mathcal{B}_3$ 中同时包含 i 和 j 的成员有7个, $3 \leq i < j \leq 5$.

事实2 以下陈述中至多有一句是正确的.

(i) $\{1, 2\}$ 属于 $C(X)$;

(ii) $\{1, 3\}$ 或 $\{2, 3\}$ 属于 $C(X)$;

(iii) $\{1, 4\}$ 或 $\{2, 4\}$ 属于 $C(X)$;

(iv) $\{1, 5\}$ 或 $\{2, 5\}$ 属于 $C(X)$.

事实2的证明 假如(i)-(iv)中至少有两是正确的, 鉴于(ii), (iii), (iv)的地位是等价的, 故只考虑以下两种情况. 若(i)和(ii)正确, 此时 $C(Y)$ 中的每个成员同时包含1, 3(或2, 3), 由事实1(iv)知, 只有6个集合可以作为 $C(X)$ 中的成员, 矛盾; 若(ii)和(iii)正确, 此时 $C(Y)$ 中的每个成员同时包含3, 4, 由事实1(v)知, 只有7个集合可以作为 $C(X)$ 中的成员, 矛盾. 事实2证毕.

事实3 出现在事实2中的四条陈述都不正确.

事实3的证明 假如(i)成立, 由1和2的对称性, 不妨设其顶点颜色为2, 则每个 $C(v_j)$ 包含颜色1, 故 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 2\}\} \setminus \{\{3, 4, 5\}\}$, 其中 $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 2\}\} \setminus \{\{3, 4, 5\}\}$ 包含16个成员. 再由 $C(Y)$ 中的成员均不是 $\mathcal{B}_2$ 中的, 也不是 $\{1, 2\}$, 且每个 $C(v_j)$ 均包含颜色1, 可知: $C(Y) \subseteq \{\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, 故 $C(X) \subseteq \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$. 现由 $\{1, 4, 5\}$ 属于 $C(Y)$, 若其顶点颜色为4, 则 $\{2, 3, 4\}$ 不能与之染色成功, 矛盾; 若其顶点颜色为5, 则 $\{2, 3, 5\}$ 不能与之染色成功, 矛盾. 因此(i)不成立.

假如(ii)成立, 则 $C(Y)$ 的每个成员均包含颜色3. 由假设及事实1(ii)知, $C(Y)$ 只可能是 $\mathcal{B}_3$ 中10个含3的成员. 此时考虑 $8 \leq n \leq 10$ 的情况, 可知 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, 其中 $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ 包含18个成员. 此时以下两个断言是正确的.

断言1 $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 至多有一个属于 $C(Y)$.

断言1的证明 假如 $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 均属于 $C(Y)$, 由于 $\{1, 3\}$ 或 $\{2, 3\}$ 属于 $C(X)$, 其顶点颜色为1或2, 其关联边颜色为3, 故 $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 的顶点颜色只能是4和5, 其关联边的颜色只能是1或3. 于是 $\{1, 4, 5\}$ 和 $\{2, 4, 5\}$ 均不属于 $C(X)$. 再由 $C(Y)$ 中的每个成员均包含颜色3, 则 $\{1, 4, 5\}$ 和 $\{2, 4, 5\}$ 均不属于 $C(Y)$, 此时

$$C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\} \setminus \{\{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\},$$

其中 $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\} \setminus \{\{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$ 包含16个成员. 下面考虑 $n = 8$ 的情况. 由于 $C(X)$ 中的每个成员均包含1或2, 故 $\{3, 4, 5\}$ 属于 $C(Y)$, 且其顶点颜色不是3. 若其顶点颜色为4, 则 $\{1, 2, 4\}$ 不能与之染色成功, 矛盾; 若其顶点颜色为5, 则 $\{1, 2, 5\}$ 不能与之染色成功, 矛盾. 断言1证毕.

断言2 $\{2, 3, 4\}$ 和 $\{2, 3, 5\}$ 至多有一个属于 $C(Y)$.

断言2的证明与断言1类似, 此处不再赘述.

根据断言1和断言2, 由对称性, 可不妨设 $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{2, 3, 5\}$ 属于 $C(Y)$, 其顶点颜色分别为4和5, 则 $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ 和 $\{1, 2, 4, 5\}$ 均不属于 $C(X)$, 否则与E-全染色矛盾, 并且 $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ 和 $\{1, 2, 4, 5\}$ 也不属于 $C(Y)$. 此时

$$C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \setminus \{\{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\},$$

15个集合不能区分 X 和 Y 中的至少16个顶点, 矛盾. 因此(ii)不成立.

至于(iii)或(iv)可类似(ii)推出矛盾.

至此, 事实3证毕.

以上事实说明: 含1或2的2-子集均不属于 $C(X)$, 从而 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ 恰好包含16个集合. 由前面的推理知: $\{3, 4, 5\}$ 属于 $C(Y)$, $\mathcal{B}_2$ 中的成员都属于 $C(X)$. 若 $\{3, 4, 5\}$ 的顶点颜色为3, 则与 $\{1, 2, 3\}$ 染色不成功, 矛盾; 若 $\{3, 4, 5\}$ 的顶点颜色为4, 则与 $\{1, 2, 4\}$ 染色不成功, 矛盾; 若 $\{3, 4, 5\}$ 的顶点颜色为5, 则与 $\{1, 2, 5\}$ 染色不成功, 矛盾.

情形2.1.2 $\mathcal{B}_2$ 中至少有一个成员属于 $C(Y)$.

不妨设为 $\{1, 2, 3\}$, 则 $C(X)$ 中的每个成员将同时包含颜色1和颜色2, 因此只有以下7个集合可以作为 X 中的顶点的色集合: $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 7个集合不能区分 X 中的8个顶点, 矛盾.

情形2.2 $\mathcal{B}_1$ 中至少有一个成员属于 $C(Y)$.

此时每个 $C(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 至少同时包含3, 4, 5中的某一种色, 不妨设 $3 \in C(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$.

情形2.2.1 $\mathcal{B}_2$ 中的成员均不属于 $C(Y)$, 显然 $\{1, 2, 4\}$ 和 $\{1, 2, 5\}$ 不是 X 和 Y 中任一顶点的色集合. 下面分情况讨论.

(i) $\{1, 3\}$ 和 $\{2, 3\}$ 中至少有一个属于 $C(X)$.

此时 $C(Y)$ 中的每个成员都包含颜色3, 从而 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 中的每个成员都包含颜色3, 因此 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B} \cup \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\} \setminus \{\{4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$, 即 $8 + n \leq 19 + 2 - 6 = 15$, 15个集合不能区分 X 和 Y 中的至少16个顶点, 矛盾.

(ii) $\{1, 3\}$ 和 $\{2, 3\}$ 都不属于 $C(X)$.

由 $\{1, 2, 4\}$ 和 $\{1, 2, 5\}$ 不是 X 和 Y 中任一顶点的色集合, 可知

$$C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\},$$

下面分情况讨论.

若 $\{1, 2, 3\}$ 属于 $C(X)$, 则 $\{4, 5\}$ 不属于 $C(Y)$, 显然也不包含于 $C(X)$. 此时 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{4, 5\}\}$, 有 $8 + n \leq 19 - 3 = 16$. 下面只考虑 $n = 8$ 的情形. 由 $C(Y)$ 中的每个成员均包含颜色3, 故 $\{1, 4, 5\}$ 和 $\{2, 4, 5\}$ 不属于 $C(Y)$, 则它们属于 $C(X)$. 如果 $\{1, 2, 3\}$ 的顶点颜色为1, 那么 $\{1, 4, 5\}$ 不能与之染色成功, 矛盾; 如果 $\{1, 2, 3\}$ 的顶点颜色为2, 那么 $\{2, 4, 5\}$ 不能与之染色成功, 矛盾.

若 $\{1, 2, 3\}$ 不属于 $C(X)$, 则 $\mathcal{B}_2$ 中的成员均不是 X 和 Y 中任一顶点的色集合, 此时 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3$, 有 $8 + n \leq 19 - 3 = 16$. 下面只考虑 $n = 8$ 的情形. 由前面的推理知: $\mathcal{B}_1$ 中的成员均属于 $C(Y)$, 且每个 $C(u_i)$ 至少同时包含3, 4, 5中的某两种色. 由对称性, 不妨设每个 $C(u_i)$ 包含3, 4, 则 $C(X)$ 只能是以下6个集合之一: $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 矛盾.

情形2.2.2 $\mathcal{B}_2$ 中至少有一个成员属于 $C(Y)$.

此时 $\{1, 2\} \in C(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, 从而 $C(X)$ 中的成员只能是以下4个集合之一: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 矛盾.

情形3 $|\{\varphi(u_i) | i = 1, 2, \dots, 8\}| = 3$.

不妨设 $\varphi(u_i) \in \{1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, 则当 $C(v_j)$ 是2-子集时不包含颜色1, 不包含颜色2, 也不包含颜色3, 是3-子集时不是 $\{1, 2, 3\}$, 因此可以作为 Y 中顶点色集合 $\mathcal{C}$ 的 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集

的数目为 $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} - 10 = 16$. 当 $17 \leq n \leq 34$ 时, 矛盾. 下面考虑 $8 \leq n \leq 16$ 的情况. 令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, 其中

$$\mathcal{C}_1 = \{\{4, 5\}\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{i, j, k\} \mid 1 \leq i < j \leq 3, k = 4, 5\},$$

$\mathcal{C}_3$ 为 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的 4-子集, 5-子集以及不在 $\mathcal{C}_2 \cup \{\{1, 2, 3\}\}$ 中的 3-子集构成的集合.

情形3.1 $\{4, 5\}$ 属于 $C(Y)$.

此时 $C(X)$ 中的每个成员同时包含颜色 4 或颜色 5, 由 4 和 5 的对称性, 不妨设为 4. 下面分情况讨论.

情形3.1.1 $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ 中至少有一个包含于 $C(X)$.

此时 $C(Y)$ 中的每个成员均包含颜色 4, 从而 $\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}$ 和 $\{1, 2, 3, 5\}$ 都不属于 $C(Y)$, 显然也不属于 $C(X)$, 故 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{C} \cup \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \setminus \{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$, 即 $8 + n \leq 16 + 3 - 4 = 15$, 15 个集合不能区分 X 和 Y 中的至少 16 个顶点, 矛盾.

情形3.1.2 $\{1, 4\}, \{2, 4\}$ 和 $\{3, 4\}$ 都不属于 $C(X)$.

此时 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{C}$, 而 $\mathcal{C}$ 恰好包含 16 个集合, 下面仅考虑 $n = 8$ 的情况. 由于 $C(X)$ 中每个成员同时包含颜色 4, 故 $\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}$ 和 $\{2, 3, 5\}$ 都不属于 $C(X)$, 从而只能属于 $C(Y)$, 则 $C(X)$ 中的每个成员同时包含颜色 1, 颜色 2 和颜色 3, 因此 $C(X)$ 中的成员只能是以下 2 个集合: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 矛盾.

情形3.2 $\{4, 5\}$ 不属于 $C(Y)$, 显然也不属于 $C(X)$, 则 $C(Y) \subseteq \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$.

事实4 (i) $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 中包含 i 的成员有 10 个, $i = 1, 2, 3$;

(ii) $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 中包含 j 的成员有 11 个, $j = 4, 5$;

(iii) $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 中同时包含 i 和 j 的成员有 6 个, $1 \leq i < j \leq 3$;

(iv) $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 中同时包含 i 和 j 的成员有 7 个, $1 \leq i \leq 3, j = 4, 5$;

(v) $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 中同时包含 4 和 5 的成员有 7 个.

事实5 以下陈述中至多有一句是正确的.

(i) $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ 和 $\{2, 3\}$ 中至少有一个属于 $C(X)$;

(ii) $\{1, 4\}, \{2, 4\}$ 和 $\{3, 4\}$ 中至少有一个属于 $C(X)$;

(iii) $\{1, 5\}, \{2, 5\}$ 和 $\{3, 5\}$ 中至少有一个属于 $C(X)$.

事实5的证明 假如 (i)-(iii) 中至少有两句是正确的, 鉴于 (ii) 和 (iii) 的地位是等价的, 故只考虑以下两种情况. 若 (i) 和 (ii) 正确, 此时 $C(Y)$ 中的每个成员至少同时包含 1, 4 (或 2, 4, 或 3, 4), 由事实 4(iv) 知, 只有 7 个集合可以作为 $C(X)$ 中的成员, 矛盾; 若 (ii) 和 (iii) 正确, 此时 $C(Y)$ 中的每个成员同时包含 4 和 5, 由事实 4(v) 知, 只有 7 个集合可以作为 $C(X)$ 中的成员, 矛盾. 事实 5 证毕.

事实6 出现在事实 5 中的三条陈述都不正确.

事实6的证明 当 (i) 成立时, $C(Y)$ 中的每个成员至少同时包含 1, 2, 3 中的某一种色, 由于 1, 2, 3 的对称性, 不妨设为 1, 则可以作为 $C(Y)$ 中的成员的只能从 $\mathcal{C}_4$ 中选取, 其中 $\mathcal{C}_4 = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, 且 $|\mathcal{C}_4| = 10$. 因此 $\mathcal{C}_4$ 中至多有两个成员不属于 $C(Y)$, 即 $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 中至少有 2 个成员属于 $C(Y)$. 此时以下断言是成立的:

断言3 $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 中恰有 2 个属于 $C(Y)$.

断言3的证明 如果 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 中至少有3个属于 $C(Y)$, 则 $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ 均不属于 $C(X)$, 显然也不属于 $C(Y)$, 此时 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \setminus \{\{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$, 即 $8 + n \leq 15 + 4 - 5 = 14$, 14个集合不能区分 X 和 Y 中的至少16个顶点, 矛盾. 断言3证毕.

根据断言3, 继续分以下情况进行讨论.

若 $\{1, 2, 4\}$ 和 $\{1, 2, 5\}$ 属于 $C(Y)$, $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 不属于 $C(Y)$, 即

$$C(Y) \subseteq \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

由于 $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$ 不能与 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$ 染色成功, 故 $\{2, 4, 5\}$ 和 $\{3, 4, 5\}$ 均不属于 $C(X)$. 又因为 $\{1, 4, 5\}$ 属于 $C(Y)$, 则 $\{2, 3\}$ 不属于 $C(X)$, 此时

$$C(X) \subseteq \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}\}.$$

如果 $\{1, 4, 5\}$ 的顶点颜色为4, 则 $\{2, 3, 4\}$ 与之染色不成功, 矛盾; 如果 $\{1, 4, 5\}$ 的顶点颜色为5, 则 $\{2, 3, 5\}$ 与之染色不成功, 矛盾.

若 $\{1, 2, 4\}$ 和 $\{1, 3, 4\}$ 属于 $C(Y)$, $\{1, 2, 5\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 不属于 $C(Y)$, 即

$$C(Y) \subseteq \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

由于 $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ 不能与 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ 染色成功, 故

$$\{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$$

均不属于 $C(X)$. 又由 $\{1, 4, 5\}$ 属于 $C(Y)$, 由4, 5的对称性, 不妨设顶点颜色为5, 则 $\{2, 3\}$ 和 $\{2, 3, 5\}$ 都不属于 $C(X)$, 此时 $C(X) \subseteq \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$, 6个集合不能区分 X 中的8个顶点, 矛盾.

综上(i)不成立.

当(ii)成立时, 此时 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 和 $\{1, 2, 3, 4\}$ 都不是 Y 中任一点的色集合, 因此

$$C(Y) \subseteq \{\{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

7个集合不能区分 Y 中的至少8个顶点, 矛盾. 因此(ii)不成立.

至于(iii)可类似(ii)推出矛盾.

至此事实6证毕.

以上事实说明: 含1的2-子集, 含2的2-子集, 含3的2-子集均不属于 $C(X)$, 从而

$$C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\{1, 2, 3\}\}, \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\{1, 2, 3\}\}$$

恰好包含16个成员. 因此 $\{1, 2, 3\}$ 必为 X 中某个顶点的色集合, 由1, 2, 3的对称性, 不妨设顶点颜色为1, 则 $\{1, 4, 5\}$ 不能与之染色成功. 因此 $\{1, 4, 5\}$ 不属于 $C(Y)$, 从而属于 $C(X)$. 以下分情况讨论.

如果 $\mathcal{C}_2$ 中的成员均不属于 $C(Y)$, 则必然属于 $C(X)$, 此时 $C(X) \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$, 从而

$C(Y) \subseteq \{\{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. 但 $\{2, 4, 5\}$ 与 $\{1, 3, 5\}$ 染色不成功, 矛盾.

如果 $\mathcal{C}_2$ 中的成员至少有一个属于 $C(Y)$, 不妨设为 $\{1, 2, 4\}$, 则 $\{1, 4, 5\}$ 不能与之染色成功, 即 $\{1, 4, 5\}$ 不属于 $C(X)$, 显然 $\{1, 4, 5\}$ 不是 X 和 Y 中任一顶点的色集合. 此时

$$C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\{1, 2, 3\}\} \setminus \{\{1, 4, 5\}\},$$

即 $8 + n \leq 15 + 1 - 1 = 15$, 15个集合不能区分 X 和 Y 的至少16个顶点, 矛盾.

情形4 $|\{\varphi(u_i) | i = 1, 2, \dots, 8\}| = 4$.

不妨设 $\varphi(u_i) \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, 则每个 $C(v_j)$ 均不是2-子集, 是3-子集时不是 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, 是4-子集时不是 $\{1, 2, 3, 4\}$, 因此可以作为 Y 中顶点色集合 $\mathcal{D}$ 的 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集的数目为

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} - 5 = 11.$$

当 $12 \leq n \leq 34$ 时, 11个集合不能区分 Y 中的 n 个顶点, 矛盾. 以下仅考虑 $8 \leq n \leq 11$ 的情况. 令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, 其中

$$\mathcal{D}_1 = \{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\};$$

$$\mathcal{D}_2 = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

经计算得 $\mathcal{D}$ 中包含 i 的成员有7个, $i = 1, 2, 3, 4$; $\mathcal{D}$ 中包含5的成员有11个. 因此 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ 均不属于 $C(X)$.

情形4.1 $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ 均不属于 $C(X)$.

此时 $C(X) \cup C(Y) \subseteq \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_3$, 其中

$$\mathcal{D}_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\},$$

且 $|\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_3| = 16$. 显然 $\mathcal{D}_3$ 中的成员均是 $C(X)$ 中的成员, 故 $\mathcal{D}_1$ 中恰有3个是 $C(X)$ 中的成员. 由1, 2, 3, 4的对称性, 可设 $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$ 属于 $C(X)$, 则 $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$ 必然属于 $C(Y)$, 与VDET染色矛盾.

情形4.2 $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ 中至少有一个属于 $C(X)$.

此时 $\mathcal{D}_1$ 中的元素均不属于 $C(Y)$, 且有 $C(Y) \subseteq \mathcal{D}_2$, 而 $|\mathcal{D}_2| = 5$, 5个集合不能区分 Y 中的至少8个顶点, 矛盾.

因此, $K_{8,n}$ ($8 \leq n \leq 34$)不存在5-VDET染色, 即当 $8 \leq n \leq 34$ 时, $\chi_{vt}^e(K_{8,n}) \geq 6$. 下面给出 $K_{8,n}$ 的一个6-VDET染色.

首先在表1中给出了 φ_{34} (表1的第一行表示顶点 u_i ($1 \leq i \leq 8$)的色集合, 第二行表示顶点 u_i ($1 \leq i \leq 8$)的颜色, 第三行的34(4)表示顶点 v_1 着色4, v_1 的关联边 $u_1v_1, \dots, u_8v_1$ 分别着色3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 以下如此类推). 当 $8 \leq j \leq 34$ 时, $K_{8,34}$ 的6-VDET染色 φ_{34} 在由 $X \cup \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ 所导出的子图上的限制显然是 $K_{8,j}$ 的6-VDET染色 φ_j .

表1 $K_{8,34}$ 的6-VDET 染色 φ_{34}

		-56	-26	-16	-2	-1	-6	-5	
		2	1	2	1	2	1	2	1
v_1	34(4)	3	3	3	3	3	3	3	3
v_2	35(5)	3	3	3	3	3	3	3	3
v_3	36(6)	3	3	3	3	3	3	3	3
v_4	45(5)	4	4	4	4	4	4	4	4
v_5	46(6)	4	4	4	4	4	4	4	4
v_6	134(4)	1	3	3	3	3	3	1	3
v_7	135(5)	1	3	3	3	3	3	1	3
v_8	136(6)	1	3	3	3	3	3	1	3
v_9	145(5)	1	4	4	4	4	4	1	4
v_{10}	146(6)	1	4	4	4	4	4	1	4
v_{11}	156(6)	1	5	5	5	5	5	1	5
v_{12}	234(4)	3	3	3	3	3	2	3	2
v_{13}	235(5)	3	3	3	3	3	2	3	2
v_{14}	236(6)	3	3	3	3	3	2	3	2
v_{15}	245(5)	4	4	4	4	4	2	4	2
v_{16}	246(6)	4	4	4	4	4	2	4	2
v_{17}	345(5)	3	3	3	3	4	4	4	4
v_{18}	346(6)	3	3	3	3	4	4	4	4
v_{19}	356(6)	3	5	5	5	5	5	3	5
v_{20}	456(6)	4	5	5	5	5	5	4	5
v_{21}	1235(5)	1	3	3	3	3	2	1	2
v_{22}	1236(6)	1	3	3	3	3	2	1	2
v_{23}	1245(5)	1	4	4	4	4	2	1	2
v_{24}	1246(6)	1	4	4	4	4	2	1	2
v_{25}	1256(6)	1	5	5	5	5	2	1	2
v_{26}	1346(6)	1	3	4	3	3	3	3	3
v_{27}	1356(6)	1	3	5	3	3	3	3	3
v_{28}	1456(6)	1	4	5	3	3	3	3	3
v_{29}	2346(6)	3	3	3	3	3	2	4	3
v_{30}	2356(6)	3	3	3	3	3	2	3	5
v_{31}	2456(6)	4	4	4	4	4	2	4	5
v_{32}	3456(6)	3	3	3	3	3	3	4	5
v_{33}	12356(5)	1	3	3	6	6	2	6	6
v_{34}	12456(5)	1	4	4	6	6	2	6	6

当 $n \geq 35$ 时, 将对 $K_{8,n}$ 的VDET色数继续进行研究.

参考文献:

- [1] Harary F, Plantholt M. The point-distinguishing chromatic index [A]. in: F.Harary, J.S. Maybee(Eds.), Graphs and Application[C]. New York: Wiley, 1985, 147-162.
- [2] Horňák M, Soták R. Localization jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Discuss Math Graph Theory, 1997, 17: 243-251.
- [3] Horňák M, Zagaglia Salvi N. On the point-distinguishing chromatic index of $K_{m,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 2006, 80: 75-85.
- [4] Zagaglia Salvi N. On the value of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 1990, 29B: 235-244.
- [5] Chen Xiang'en, Zu Yue, Zhang Zhongfu. Vertex-Distinguishing E-Total Colorings of Graphs[J]. Arab J Sci Eng, 2011, 36: 1485-1500.
- [6] Chen Xiang'en, Zu Yue. Vertex-Distinguishing E-Total Coloring of the graphs mC_3 and mC_4 [J]. Journal of Mathematical Research & Exposition, 2011, 31: 45-58.

- [7] 李世玲, 陈祥恩, 王治文. 完全二部图 $K_{3,n}$ ($3 \leq n \leq 17$) 的点可区别E-全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2015, 53(6): 1171-1176.
- [8] 李世玲, 陈祥恩, 王治文. 完全二部图 $K_{3,n}$ ($n \geq 18$) 的点可区别E-全染色[J]. 山东大学学报: 理学版, 2015, 51(4): 68-71.
- [9] 李世玲. 完全二部图的点可区别E-全染色的若干结果[D]. 兰州: 西北师范大学, 2017.
- [10] Chen Xiang'en. Vertex-distinguishing E-Total coloring of complete bipartite graph $K_{7,n}$ when $7 \leq n \leq 95$ [J]. Communications in mathematical research, 2016, 32(4): 359-374.
- [11] Chen Xiang'en. Vertex-distinguishing E-total coloring of complete bipartite graph $K_{7,n}$ when $96 \leq n \leq 472$. Ars Combinatoria, 2019, 146: 361-374.

Vertex-distinguishing E-total coloring of complete bipartite graph $K_{8,n}$ with $8 \leq n \leq 34$

YANG Lan, CHEN Xiang-en

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let G be a simple graph. A total coloring φ of G is called an E-total coloring if no two adjacent vertices of G receive the same color, and no edge of G receives the same color as one of its endpoints. For an E-total coloring f of a graph G , if $C(u) \neq C(v)$ for any two distinct vertices u and v of $V(G)$, where $C(x)$ denotes the set of colors of vertex x and of the edges incident with x under φ , then φ is called a vertex-distinguishing E-total coloring of G . Let $\chi_{vt}^e(G) = \min\{k | G \text{ has a } k\text{-VDET coloring}\}$. Then $\chi_{vt}^e(G)$ is called the VDET chromatic number of G . The VDET coloring of complete bipartite graph $K_{8,n}$ is discussed and the VDET chromatic number of $K_{8,n}$ ($8 \leq n \leq 34$) has been obtained by using combinatorial analysis method, contradiction and constructing concrete coloring.

Keywords: complete bipartite graphs; E-total coloring; vertex-distinguishing E-total coloring; vertex-distinguishing E-total chromatic number

MR Subject Classification: 05C15